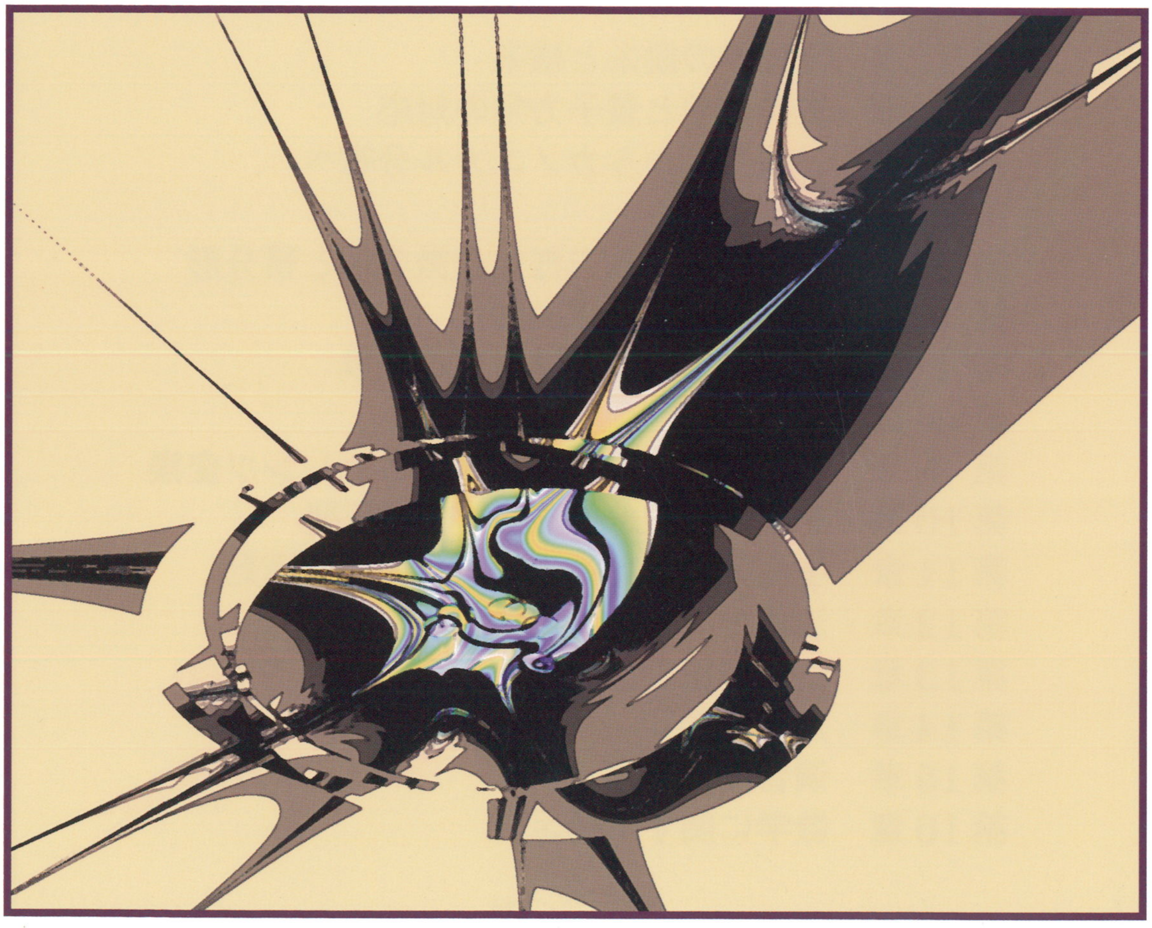
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2010年6月1日発行　第48巻6号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

6
2010

特集
現代幾何と方程式
幾何学の多様な理解を目指して



No.564
サイエンス社

別冊・数理科学

現代幾何学の発展
トポロジー・モジュライ・微分幾何の魅力

本体 2190 円　送料 290 円　表示価格は税抜きです

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 564 June 2010

現代幾何と方程式

幾何学の多様な理解を目指して

表紙：戸川 隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．郵送料小社負担にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は 1 年間（本誌のみ）11,000 円，1 年間（本誌＋別冊 2 冊）14,500 円，半年間（本誌のみ）5,500 円，半年間（本誌＋別冊 1 冊）7,250 円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2007 年/5 省略
2007 年/6 物理における位相の世界
/7 代数的物理観
/8 数学における場の量子論
/9 ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊 素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ
2008 年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊 多様体の広がり
/5 物理と数学の難所
/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊 対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観
2009 年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求
2010 年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め

数理科学臨時別冊一覧

08 年/7 ネットワーク科学への招待
08 年/9 物理のためのリー群とリー代数
08 年/11 量子暗号理論の展開
09 年/1 量子力学の考え方
09 年/7 ゲージ理論の発展
09 年/9 量子コンピュータの基礎［第 2 版］
09 年/11 重点解説 基礎微分幾何
09 年/12 ε–δ 論法再入門
10 年/1 多彩な量子の世界
10 年/3 超関数・フーリエ変換入門
10 年/5 問題例で深める物理

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
ジュンク堂書店（盛岡）
ジュンク堂書店（新潟）
旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

——大学生協・売店——
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

June 2010 MATHEMATICAL SCIENCES Number 564

特集／現代幾何と方程式

序にかえて

太田 啓史

1. はじめに

初めに編集部の方から,「現代幾何と方程式」という特集のテーマを伺ったとき,正直私は何を意図すればよいのか戸惑った．現代幾何と方程式というだけではあまりに漠としている．中学校や高校で習う直線や円など図形の方程式から始まって,他に有名と思われる方程式を思いつくままにあげてみても，大学2, 3年で習う曲面論で出てくるガウス・コダッチの方程式,ラプラス方程式,熱方程式,波動方程式，アインシュタイン方程式,最近ではポアンカレ予想で有名になったリッチ流の方程式など幾何構造に直接関わる微分方程式や，可積分系や結び目理論に関係の深いYang-Baxter方程式,一部多様体の教科書にも出てくるMaurer-Cartan方程式など実に様々である．幾何学の中には，何らかの形で何らかの方程式が現れるといっても過言ではあるまい．例えば，これら個々の方程式とそれらにまつわる幾何学の原稿を並列することにより,「現代幾何と方程式」というテーマの持つ広がりをあぶり出すのも一つであったかもしれない．あるいは，そこから何かしら共通する傾向なり現象が浮き彫りにされたかもしれない．しかし，例えばアインシュタイン方程式にせよYang-Baxter方程式にせよ,それぞれが一つの特集テーマとして足り得るものであり,それらを単に並列するよりもそれぞれで特集を組んだ方が,一読者として,ずっとおもしろいだろうと私は思った．しかし,与えられたテーマは「現代幾何と方程式」である．困った．

2. 一つの視点

結局,編集部の方が何を意図して「現代幾何と方程式」という特集テーマを小生のところに持ってこられたのか真意のほどはわからない．仮に，このテーマを別の方へ持っていかれれば,全く別のラインナップになったであろう．それはそれでおもしろい特集となったに違いない．一読者として興味ある．逆手にとれば，小生の趣味と趣向によって極めて偏向した「現代幾何と方程式」のテーマとなっても仕方がないし，むしろそれが求められているのではないかと不遜にも思うに至った．したがって,「幾何学にとって，こんな大事な方程式がとりあげられていないのはおかしいじゃないか」などというご批判があってもそれは至極当然のことであり，それはそれで是非編集部の方へご意見頂き,それをテーマに特集を組んで頂ければよいのであろうと，これまた一読者として，期待したい．

では，今号の「現代幾何と方程式」の趣向はいかなるものかをここで簡単にご説明せねばなるま

い．否，それぞれに素晴らしい執筆者の方々が珠玉の原稿を書いて下さっているので，実際に読んで頂ければ全体を通してのゆるやかな流れの一例を了解して頂けるはずであり，小生が拙い文章でわざわざ説明するなど不粋極まりないのであるが，皆様に原稿を依頼しておきながら自らは何も書かないのでは許されまい．お許し願いたい．

おおむね，ここに出てくる方程式は多かれ少なかれ物理と関係しているものが多い．解析力学において運動を記述する基礎方程式の一つに**ハミルトン方程式**と呼ばれる一階偏微分方程式（系）がある．太陽系の運動を例にとってみると，太陽の周りを廻る惑星のようなハミルトン方程式の「周期解」が存在するか，存在するならどれくらいあるか，という問題は基本的である．これは純粋に微分方程式の問題であるが，ハミルトン方程式の背後に潜む幾何構造に目を向けることにより，問題は幾何学的な視点を持つようになる．このように解析力学の背後にある幾何構造を抽出して成立し成長したのが，今日シンプレクティック幾何学と呼ばれる幾何学である．シンプレクティック構造は，局所的には常に標準的なものと一致し（ダルブーの定理），その意味で局所幾何学としては自明である．一方，大域的にはまだまだわからないことが多く，現在活発に研究されている．大域的シンプレクティック幾何の研究のブレイクスルーは，1980 年代初頭グロモフ（Gromov）による擬正則曲線の理論の創始である．シンプレクティック構造があると，それに同調して概複素構造と呼ばれる複素構造の代用品が常に存在する．概複素構造を用いて，複素関数論でおなじみの**コーシー・リーマン方程式**を考えることができる．これだけだと非常に安易なように思えるが，グロモフは非圧縮性定理*1) と呼ばれる，体積を保つような幾何学では決して起こらないシンプレクティック幾何特有の現象を，擬正則曲線の理論を用いて証明し驚かせた．擬正則曲線の方程式は 1 階非線形楕円型偏微分方程式である．グロモフが擬正則曲線の理論を考えたのは，ドナルドソン（Donaldson）がゲージ理論の基礎方程式である**反自己双対方程式**を用いて 4 次元トポロジーに衝撃的な結果を出した直後であった．反自己双対方程式は接続に対する 1 階非線形楕円型偏微分方程式である．聞くところによると，グロモフはドナルドソンの話を知ってそのコーシー・リーマン方程式版の類似を考えたのが一つのきっかけだったそうである．擬正則写像の理論はその後，フレアー（Floer）コホモロジー，グロモフ・ウィッテン不変量，量子コホモロジーなどシンプレクティック幾何にとどまらず物理の弦理論にまで関連して発展していく．その中にミラー対称性予想と呼ばれる物理から提言された数学の予想がある．ミラー対称性予想は，あるシンプレクティック多様体の幾何学とそのミラーと呼ばれる複素多様体の複素幾何学とが「等価」である，と主張する．予想にはいくつかの変種があるがその一例として，シンプレクティック幾何側のグロモフ・ウィッテン不変量が，複素幾何側のある**特異点**のまわりである**超幾何方程式**の解を用いて記述される，というものがある．

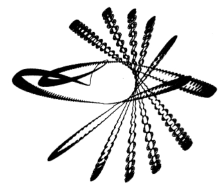
以上，出てきた方程式は，ある幾何構造に付随して出てくる関数なり写像なりある種の「場」が満たす方程式である．これらの「場」の方程式の解のモジュライ空間を考えることにより，グロモフ・ウィッテン不変量やドナルドソン不変量など幾何学的不変量が得られるわけだが，さらに一段進んで導出された不変量自体がある方程式を満たす，と昇華することがある．そのような方程式は，一見異なる数学を結びつけさらに奥に潜む世界を拓くことがある．**WDVV 方程式**もその一種であり，ドナルドソン不変量に対してもある方程式が出てくるのであるが，今回それについての原稿を一つ入れることができなかった点は残念である．

なお，今回は全員ではないが日頃あまりこういうところに出たことがなさそうな方々に執筆をお願いした．これは隠れたポイントである．

（おおた・ひろし，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

*1) $B(R) = \{(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbf{R}^{2n} | \sum_{i=1}^{2n} x_i^2 < R^2\}$, $Z(r) = \{(x_1, \cdots, x_{2n}) \in \mathbf{R}^{2n} | x_1^2 + x_2^2 < r^2\}$ としたとき，$r < R$ ならば，$B(R)$ は決して $Z(r)$ にシンプレクティック構造を保つ写像で埋め込むことはできない，という定理．シンプレクティック幾何は何かしら 2 次元的に広がったものを扱う幾何学ということを示している．

ハミルトン方程式と幾何学



伊藤　秀一

1. はじめに

表題にあるハミルトン方程式とは古典力学の運動方程式をハミルトン形式と呼ばれる形で書いた常微分方程式系である．これは, 17 世紀後半のニュートンによる万有引力の発見と微積分法の形成から 150 年ほど後に，ハミルトン（W.R. Hamilton, 1805–1865）が定式化したものである．

まず，ニュートンの運動方程式から始めて，ハミルトン方程式がいかなるものか，例を通じて説明しよう．以下本稿を通じて，時間を t，時間微分 d/dt，d^2/dt^2 をドット（$\cdot$, $\cdot\cdot$）で表す．

最も簡単な運動として，弾性定数 $k>0$ のバネにつながれた質量 m のおもりの振動（単振動）を考えよう．平衡位置からのおもりの変位を $x\in\boldsymbol{R}$ とすれば，フックの法則から，ニュートンの運動法則「質量×加速度＝力」を書き下すと

$$m\ddot{x}=-kx$$

が得られる．これが単振動に対するニュートンの運動方程式である．より一般に，$\boldsymbol{R}^d\,(d=1,2,3)$ 内を N 個の質点 $\mathrm{P}_i\ (i=1,\ldots,N)$ が相互作用を及ぼし合いながら運動する場合を考えよう．点 P_1 の座標を $(x_1,\ldots,x_d)$，P_2 の座標を $(x_{d+1},\ldots,x_{2d})$，... というように N 個の質点の座標をすべて並べたものを $x=(x_1,\ldots,x_n)$ $(n=Nd)$ とし，N 個の質点の質量をそれぞれ d 個ずつ合計 n 個並べたものを，$m_1,\ldots,m_n$ とする．相互作用の形態の中で最も重要なのはポテンシャル場，つまりある関数 $U(x)$ の勾配として実現されるときであり，その運動方程式は次のように書ける：

$$m_i\ddot{x}_i=-\frac{\partial U}{\partial x_i}\quad(1\le i\le n).\tag{1}$$

単振動は $N=1$ で $U=kx^2/2$ のポテンシャル場である．ここで，系の**運動エネルギー**を

$$T(\dot{x})=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{x}_i^2\tag{2}$$

と定義し，$T+U$ を系の**全エネルギー**と呼ぶ．さらに，$\dot{x}_i$ の代わりに $y_i:=m_i\dot{x}_i$ を導入し

$$H(x,y)=T+U,\quad T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^2}{m_i}$$

とおくと，(1) は次の 1 階微分方程式系と同値になる：

$$\dot{x}_i=\frac{\partial H}{\partial y_i},\ \dot{y}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\ \ (1\le i\le n).\tag{3}$$

ここで，$y=(y_1,\ldots,y_n)$ を系の運動量ベクトルと呼ぶ．一般に $(x,y)=(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ の任意の関数 $H(x,y)$ に対して，(3) を H を**ハミルトニアンとする自由度 n のハミルトン方程式**（系）あるいは**ハミルトン系**と言う．また，**ハミルトンの正準方程式**（系）とも言う．これは $2n$ 個の変数 x_i,y_i を未知関数とする常微分方程式系であり，これらを時間 t の関数として求めることが方程式系 (3) を解くということである．

ハミルトン方程式は力学の基礎方程式であり，

その定式化は**解析力学**と呼ばれる形で整備されている．解析力学は古典力学を微積分法に基づき解析的に取り扱うための理論の集大成と言えるが，同時に，その発展は多様体や微分形式といった現代幾何学の基本概念を生み出す源流ともなったのである．本稿では，質点系の力学を通じてハミルトン方程式の定式化に至る道筋を，幾何的な観点を大切にできるだけ初等的に述べ，それによって力学と幾何学の結びつきを明らかにしたい．なお，ハミルトン系はシンプレクティック多様体上で定義するのが数学的には自然であるが，本稿ではあえてそれについては触れないことにした．また，最後にハミルトン力学系と呼ばれる分野のいくつかの話題について紹介する．以下本稿で考える関数，曲線，写像等々はすべて実の C^∞ 級とし，ベクトルは常に列ベクトルとして考え，ユークリッド空間の標準内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表す．

2. 拘束運動とオイラー・ラグランジュ方程式

前節で登場した運動方程式はユークリッド空間における微分方程式である．しかし，質点系に拘束条件（束縛条件）が加わると，それはユークリッド空間に埋め込まれた多様体上の運動方程式になる．上述のポテンシャル場において，拘束条件が l 個の関数の零点として与えられ，それらの共通部分が $k := n - l$ 次元の多様体 M をつくると仮定しよう．曲線 $t \mapsto x(t)$ が M 上の曲線ならば，速度ベクトル $\dot{x}(t)$ は点 $x(t) \in M$ の接空間 $T_{x(t)}M$ に含まれる．M の点は質点系の配置を表すので，M を系の**配位空間**と言う．例えば，重力場での鉛直平面（(x_1, x_2) 平面）内の原点を支点とする振り子（単振り子）の運動では，$x_1^2 + x_2^2 =$ 定数 で与えられる円周 S^1 が配位空間である．

このような拘束運動をニュートンの運動法則に基づいて扱うと，振り子ならば糸の張力にあたる「拘束力」を導入し，この質点系には外力 F_a（大きさ mg で鉛直下向き）と拘束力 F_c を加えた力が働くと考えて（図 1），運動方程式は

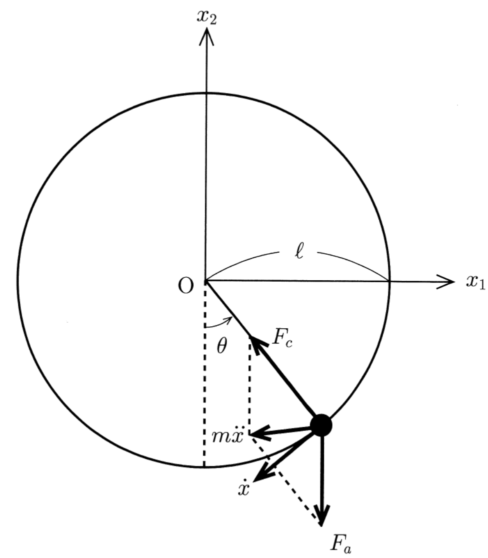


図 1　単振り子の運動．

$$m_i \ddot{x}_i = (F_a)_i(x) + (F_c)_i(x) \ \ (1 \leq i \leq n) \quad (4)$$

となる．ただし，$(F_a)_i$，$(F_c)_i$ はベクトル F_a，F_c の第 i 成分である．点 $x \in M$ での拘束力 $F_c(x)$ が接空間 $T_x M$ に直交するときの拘束を**滑らかな拘束**と言う．いま点 $x \in M$ の局所座標を $q = (q_1, \ldots, q_k)$ とし $x = \varphi(q)$ とする．このとき，関数 $L := T - U$ を導入すると，運動方程式 (4) と拘束条件から微分方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ \ (1 \leq i \leq k) \quad (5)$$

が得られる（詳しくは文献 8) などを参照）．これは $q_1, \ldots, q_k$ を未知関数とする 2 階常微分方程式系であり，**ラグランジュの運動方程式**と呼び，関数 L を**ラグランジアン**と言う．運動エネルギー T の表式 (2) より，拘束条件のない方程式 (1) も (5) のように書けることがわかる．また，単振り子の場合ならば，円周の局所座標として図 1 のように角 θ をとると，質点の位置は

$$(x_1, x_2) = (\ell \sin\theta, -\ell\cos\theta)$$

となるから，

$$T = \frac{m}{2}\ell^2\dot{\theta}^2, \quad U = -mg\ell\cos\theta$$

である．よってラグランジュの運動方程式は

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta \quad (\omega = \sqrt{g/\ell})$$

というよく見慣れた単振り子の方程式になる．

再び一般の場合に戻ろう．多様体 M には運動エネルギー $T(\dot{x})$ から自然とリーマン計量が入る．すなわち，$x = \varphi(q)$ から $\dot{x} = D\varphi(q)\dot{q}$ （$D\varphi(q)$ は φ のヤコビ行列）であることを用いると，

$$g(q) = \bigl(g_{ij}(q)\bigr), \quad g_{ij}(q) = \sum_{l=1}^{n} m_l \frac{\partial x_l}{\partial q_i}\frac{\partial x_l}{\partial q_j}$$

は T_xM 上の正値2次形式（リーマン計量）であり，

$$T(\dot{x}) = \frac{1}{2}\langle g(q)\dot{q}, \dot{q}\rangle \tag{6}$$

である．とくに $U \equiv 0$ の場合を考えると，(5) は**測地線**の方程式になる．測地線は外力がなく，配位空間 M への拘束力だけで駆動される運動であり，M だけによって決定される．拘束のない系 (1) で $U \equiv 0$ とすると，解は等速直線運動になる．

運動方程式 (5) には，局所座標の取り方によらないという大きな利点がある．いま，局所座標として $q = (q_1, \ldots, q_k)$ の代わりに $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ を用いると，それに伴う微分方程式の変換は一般に複雑なものになるが，(5) については，単に関数 L を新しい座標 ξ で書き下し，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = 0 \quad (1 \le i \le k)$$

とすればよいのである．ここで，関数 L はもともと $(x, \dot{x})$ の関数であるから，L は M の接束 TM 上の関数として大域的な意味をもっていることに注意しよう．

さらに (5) には変分法のオイラー方程式でもあるという重要な事実がある．あらためて L を TM 上の任意の実数値関数とし，M 上の固定された2点 P, Q を結ぶ曲線 $c\colon [t_0, t_1] \to M$ に対して

$$F(c) := \int_{t_0}^{t_1} L(c(t), \dot{c}(t))dt$$

とおく．F は2点を結ぶ曲線の全体という無限次元空間上の関数という意味で**汎関数**とも呼ばれ，$F(c)$ の値が停留する（極値をとる）ときの曲線 c を求める問題を**変分問題**と呼ぶ．ここで，$F(c)$ が

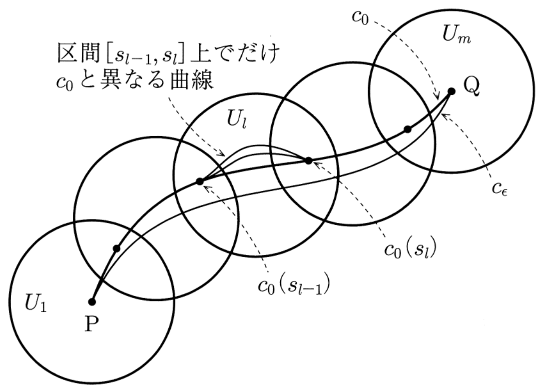


図2　変分問題の曲線族 $\{c_\epsilon\}$．

曲線 $c = c_0$ で停留するとは，c_0 を含みパラメータ $\epsilon \in \boldsymbol{R}$ に依存する任意の曲線族 $\{c_\epsilon\}$ に対して，

$$\left.\frac{d}{d\epsilon}F(c_\epsilon)\right|_{\epsilon=0} = 0 \tag{7}$$

となることを言う．

曲線 c_0 を有限個の座標近傍 U_l $(l = 1, \ldots, m)$ で覆い，c_0 を m 個の曲線弧に分割すると（図2），

$$F(c_\epsilon) = \sum_{l=1}^{m} \int_{s_{l-1}}^{s_l} L\bigl(c_\epsilon(t), \dot{c}_\epsilon(t)\bigr)dt$$

となる．c_0 と区間 $[s_{l-1}, s_l]$ 上でだけ異なる曲線族 $\{c_\epsilon\}$ を考えると，U_l の局所座標を $q = (q_1, \ldots, q_k)$ とし，部分積分を用いれば

$$\left.\frac{d}{d\epsilon}F(c_\epsilon)\right|_{\epsilon=0} = \int_{s_{l-1}}^{s_l} \left\langle \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \frac{\partial q}{\partial \epsilon} \right\rangle dt$$

となる．したがって，任意の $\partial q/\partial\epsilon$ に対して上式が 0 となるためには $q = q(t)$ が各座標近傍で方程式 (5) を満たさなければならない．逆にそのとき，2点 P, Q を結ぶ任意の曲線族 $\{c_\epsilon\}$ に対して (7) が成り立つこともわかる[8)]．これを (5) は変分問題 $\delta F = 0$ に対する**オイラー方程式**であると言うが，(5) はラグランジュの運動方程式であったことから，**オイラー・ラグランジュ方程式**とも呼ぶ．古典力学の基礎をこの方程式におく考え方を**ラグランジュ形式**と呼ぶ．以下本稿では，方程式 (5) を短くラグランジュ系，(3) をハミルトン系と呼ぶことにしよう．

3. ハミルトン系と微分形式

ラグランジュ系 (5) において $q_1,\dots,q_k$ の 2 階微分を含む項は

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q_i\partial\dot q_j}\ddot q_j \quad (1\le i\le k)$$

と書ける．したがって，条件

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot q_i\partial\dot q_j}\right)\neq 0 \tag{8}$$

が成り立つ点の近傍では，(5) を

$$\ddot q_i = f_i(q,\dot q) \quad (1\le i\le k)$$

という形に書き直すことができる．これを一階化するために，

$$\begin{cases} p_i=\dfrac{\partial L}{\partial\dot q_i} \ \ (1\le i\le k), \\ H(q,p):=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}p_i\dot q_i - L(q,\dot q)\end{cases}$$

とおこう（これを**ルジャンドル変換**と言う）．ここで，条件 (8) の下で関係式 $p=L_{\dot q}$ を局所的に $\dot q$ について解くことができるので，それを H の定義式に代入すると H は q,p の関数となり，(5) はハミルトン系

$$\dot q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot p_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\ \ (1\le i\le k) \tag{9}$$

に書き直すことができる．この (q,p) を**正準変数**，(q,p)-空間を**相空間**と呼ぶ．配位空間の座標変換 $q=\varphi(\xi)$ に対応して，$\dot q = D\varphi(\xi)\dot\xi$ であり，一方 $p=L_{\dot q}$ と $\eta=L_{\dot\xi}$ の間には関係式 $p=\left({}^tD\varphi(\xi)\right)^{-1}\eta$ が成り立つ．これは余接ベクトルの変換則であり，$\langle p,\dot q\rangle=\langle\eta,\dot\xi\rangle$ が成り立つ．よって H は余接束 T^*M の貼り合わせ（局所座標の変換）と整合するように定義されている．変換 $(q,\dot q)\mapsto(q,p)$ は大域的な微分同相とは限らないが，$L=T-U$ のときは (6) より $p=L_{\dot q}=g(q)\dot q$ であり，この変換は TM から T^*M への大域的な微分同相を与え，

$$H=\langle g(q)\dot q,\dot q\rangle-(T-U)=T+U$$

となる．

ハミルトン系 (9) はラグランジュ系 (5) とは独立に，T^*M 上の任意の関数 $H(q,p)$ に対して定義されるが，H の値は解曲線 $t\mapsto(q(t),p(t))$ に沿って不変である（これを H は (9) の**第一積分**であると言う）．実際，

$$\frac{d}{dt}H\bigl(q(t),p(t)\bigr)=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}+\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right)=0$$

である．ポテンシャル場の場合は $H=T+U$ は系の全エネルギーであり，これはよく知られたエネルギー保存則にほかならない．このことから，一般の関数 H についても，$H=$ 定数 で定義される超曲面を**エネルギー曲面**と呼ぶことが多い．

ラグランジュ系 (5) は配位空間上の変換で不変であったが，ハミルトン系 (9) はより広い範疇の変換に対して不変になる．変数 $z=(q,p)$, $\zeta=(\xi,\eta)$ の間の変換 $z=\varphi(\zeta)$ を (9) に施して得られる方程式は一般にハミルトン系にはならないが，条件

$${}^t\bigl(D\varphi(\zeta)\bigr)JD\varphi(\zeta)=J,\quad J=\begin{pmatrix}O & I\\ -I & O\end{pmatrix} \tag{10}$$

が成り立つならば（I は k 次単位行列），(9) は $H=H\circ\varphi$ をハミルトニアンとするハミルトン系

$$\dot\xi_i=\frac{\partial H}{\partial\eta_i},\ \ \dot\eta_i=-\frac{\partial H}{\partial\xi_i}\ \ (1\le i\le k)$$

に変換される．条件 (10) を満たす変換を**正準変換**あるいは**シンプレクティック変換**と言う．座標変換に限らず，一般に相空間上の写像 φ で，各点 ζ での微分 $D\varphi(\zeta)$ が (10) を満たすならば，シンプレクティック写像と言う．(10) の両辺の行列式を考えれば，$\det D\varphi(\zeta)=\pm1$ がわかるから，シンプレクティック写像は体積を保つが，実は向きも保つ（$\det D\varphi(\zeta)=1$）ことが微分形式を用いた考察からわかる．実際，(10) は変換 φ が誘導する点 ζ 上の $2k$ 次元接空間上の線形変換により，表現行列 J の 2 次形式が不変なことを意味している．これは微分形式を用いると，

$$\sum_{i=1}^{k}dp_i\wedge dq_i=\sum_{i=1}^{k}d\eta_i\wedge d\xi_i \tag{11}$$

と表せる．この両辺の k 個の外積を考えると，シンプレクティック変換は向きを保つことが従う．

余接束 T^*M の局所座標の変換は

$$q=\varphi(\xi),\quad p=\left({}^tD\varphi(\xi)\right)^{-1}\eta$$

で与えられるが，これは $\sum_{i=1}^k p_i dq_i=\sum_{i=1}^k \eta_i d\xi_i$ を満たす特別な正準変換であり，次の 2 つの微分形式は T^*M 上大域的に意味をもつ：

$$\alpha:=\sum_{i=1}^k p_i dq_i\,,\quad \omega:=\sum_{i=1}^k dp_i\wedge dq_i\,.$$

微分 2 形式 ω を多様体 T^*M の**正準構造**あるいは**シンプレクティック構造**と言う．また，T^*M 上の任意の関数 H に対して，各座標近傍における系 (9) は T^*M 上のベクトル場を定義する．これを **H をハミルトニアンとするハミルトンベクトル場**と呼び X_H と書く．これはシンプレクティック構造 ω を用いると，

$$\omega(X_H,\cdot)=-dH$$

で定まるベクトル場である．

$t=0$ で $z=\zeta$ となるハミルトンベクトル場 X_H の解を $z(t,\zeta)$ と書き，局所微分同相写像

$$\phi_H^t\colon\zeta\mapsto z(t,\zeta)$$

の 1 パラメータ族 $\{\phi_H^t\}_{t\in\boldsymbol{R}}$ をベクトル場 X_H の**流れ**と言う．任意の関数 H に対して，写像 ϕ_H^t はシンプレクティックになる[1,5,8]．

以上では微分形式[15]の概念を自由に使ったが，その基礎は 19 世紀末のポアンカレ (H. Poincaré)[17] による積分不変式の理論およびそれを発展させたカルタン (E. Cartan)[3] によって築かれた．それについて少し触れておこう．今，拡大相空間 $T^*M\times\boldsymbol{R}$ 上の曲線 $\gamma\colon t\mapsto\big(q(t),p(t),t\big)$ に対して，線積分

$$F(\gamma)=\int_\gamma\sum_{i=1}^k p_i dq_i-Hdt$$

を考えると，$(q(t),p(t))$ がハミルトン系 (9) の解になるのは，γ が汎関数 $F(\gamma)$ の停留曲線になるときである[1,8,14]．一方，γ を拡大相空間上の任意の閉曲線としてこの線積分を考えると，γ をハミルトン系 (9) の流れに沿って任意に変形しても（γ' とする．図 3)，その値は不変になる：

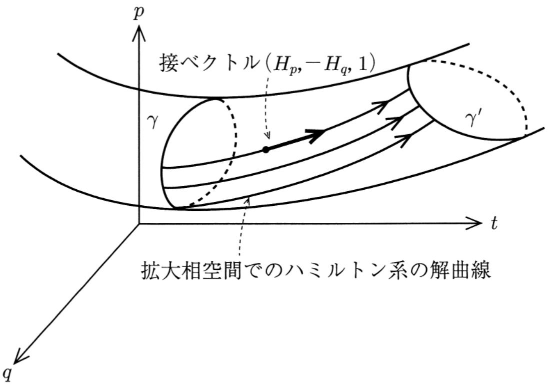


図 3　閉曲線 γ の変形と積分不変式．

$$\int_\gamma\sum_{i=1}^k p_i dq_i-Hdt=\int_{\gamma'}\sum_{i=1}^k p_i dq_i-Hdt\,.$$

これを**ポアンカレ–カルタンの積分不変式**と言う[1,8]．積分不変式とは，現代用語で言えば不変微分形式のことである．とくに γ を $t=0$ 上にとれば

$$\int_\gamma\sum_{i=1}^k p_i dq_i=\int_{\phi_H^{t,t_0}(\gamma)}\sum_{i=1}^k p_i dq_i$$

となる．このとき，流れ ϕ_H^t は**完全シンプレクティック**であると言い，ストークスの定理と γ の任意性から，ϕ_H^t はシンプレクティック（(11) を満たす）ことがわかる．

古典力学の基礎をハミルトン系に置く考え方を**ハミルトン形式**と言う．なお，剛体の運動や流体力学の問題などでは，以上とは異なる方法でハミルトン形式を構築することもある．そこではシンプレクティック構造を一般化したポアソン構造が重要な役割を果たす[13]．

4. ハミルトン力学系

ここまで少し足早に解析力学を幾何的な視点から辿ってきたが，それは力学が幾何学に及ぼしてきた道程とも言え，ハミルトン形式が数学，物理学

に及ぼした影響は計り知れないものがある．その幾何的側面は今日シンプレクティック幾何学[6,14]として結実しているが，ここでは力学系としてのハミルトン系を研究する立場から，いくつかの話題について触れたい．

(1) 可積分系とその摂動問題

ニュートンがケプラーの法則を数学的に導いて以来，力学理論の進歩を促したのは「運動方程式を解く」という目標であったであろう．その意味での「解ける方程式」は可積分系と呼ばれる．今日では可積分系という用語は広い意味で用いられているが，有限次元ハミルトン系の場合はリウビルの意味での可積分性と呼ばれる確立した概念がある．すなわち，自由度 n のハミルトンベクトル場 X_H は n 個の関数的に独立な第一積分で互いにポアソン可換なものが存在するとき，**リウビルの意味で可積分**（あるいは**完全可積分**）と言う．ここで，2 つの関数 F, G がポアソン可換とはポアソン括弧式 $\{F, G\}$ が恒等的に 0 となることを言う．ただし

$$\begin{aligned}\{F,G\} &:= \omega(X_F, X_G)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}-\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\right)\end{aligned}$$

である．自由度 1 の（時間に依らない）ハミルトン系はこの意味で可積分であり，例えば単振り子の場合，$H = y^2/2 - \omega^2 \cos x$，方程式は

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2 \sin x$$

であり，解の様子は図 4 のようになる（相空間は $T^*S^1 = S^1 \times \boldsymbol{R}$ なので，図の x 方向は 2π を法として同一視して考えるべきである）．この描像の一般化として，リウビルの意味で可積分な系では，n 個の第一積分の正則レベル集合のコンパクトな連結成分はトーラスであり，そのまわりで作用—角変数と呼ばれる変数を導入できて，解は n 次元不変トーラス上の周期解または準周期解になることがわかる（リウビル–アーノルドの定理）[1,8,16]．単振り子では，平衡点 $(n\pi, 0)$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ を除いたレベル集合はすべて正則（H の勾配ベクトルが消えない）であり，セパラトリックス（図 4 の $(-\pi, 0)$ と $(\pi, 0)$ を結ぶ曲線）以外のレベル集合は不変トーラスに相当する．天体力学の問題のように，現実の物理系では可積分系を摂動した形のハミルトニアンを考えることが多く，その意味からも可積分性の深い理解は極めて重要である．

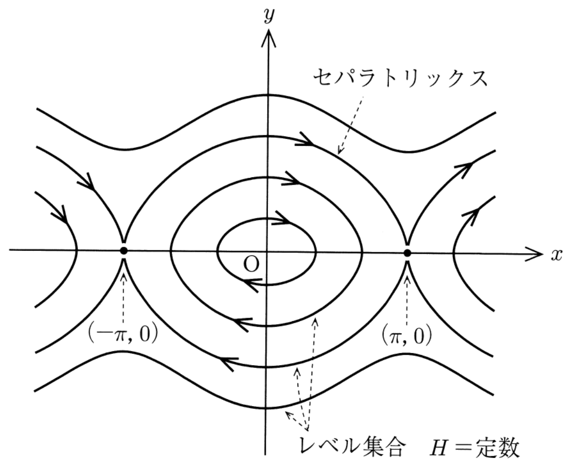


図 4　相空間上の単振り子の解．

一方，可積分系の摂動論としては，準周期軌道を載せた不変トーラスの存在を保証する KAM 理論[9,10]が重要であり，現在も盛んに研究され深化を遂げている．とくに，KdV 方程式に代表される 20 世紀後半に発見された「求積できる偏微分方程式」を無限次元ハミルトン系として捉え，その摂動論が展開されている[10]．

KAM 理論は可積分系における不変トーラスが摂動によって生き残ることを保証する理論であるが，摂動によって崩壊する不変トーラスもあり，その隙間にある解は極めて複雑な挙動を示す．これについては，変分法的考察を推し進めた Aubry–Mather 理論[18]があるが，不変トーラスの崩壊するメカニズムの理解はまだまだ不十分である．

(2) 周期軌道，ホモクリニック軌道の存在問題

力学系理論は，古典力学の運動方程式が一般には求積できず，想像もつかないような複雑な挙動を示すことを認識したことから始まったと言えよう．その発見者はポアンカレであり，今日ホモクリニックカオス[4,12]と呼ばれる現象の原型を発見

したわけであるが，そのような複雑な挙動を示す解は不安定な周期軌道や平衡解に付随して現れる．その意味で，周期軌道の存在問題は有名なポアンカレの最後の幾何的定理[14]に代表されるように，当時から力学系の基本的問題であった．とくにハミルトン系の解は変分原理を満たすことから，変分法的アプローチが古くから研究されてきた．とりわけ1980年代以降の変分法的研究の進歩は著しく[19]，アーノルド予想等のシンプレクティック幾何の諸問題に大きな進歩をもたらした[14]．ここでは，ハミルトン系のエネルギー曲面上の解の振舞いについてより素朴な観点から触れておこう．

すでに述べたように，測地線の挙動は配位空間 M によって完全に決定される．例えば，負の断面曲率をもつコンパクトリーマン多様体の測地流はアノソフ流と呼ばれるカオス的な挙動を示す[11]．

多様体 M の測地線は，M のリーマン計量である運動エネルギーをハミルトニアンとするハミルトンベクトル場の軌道であり，とくに運動エネルギーが一定というエネルギー曲面上の軌道である．その意味で，このエネルギー曲面の幾何的情報が測地線の挙動を決定している．同じことは，一般のハミルトンベクトル場についても言える．すなわち，正則な，つまり S 上で $dH \neq 0$ となる超曲面 $S = H^{-1}(c)$ ($c =$ 定数) に対して，直線束

$$\mathcal{L}_S = \{(z, \xi) \in TS \mid \omega(\xi, v) = 0 \quad (\forall v \in T_z S)\}$$

を考えると，$\omega(X_H(z), v) = -dH(z)v = 0$ であるから，

$$X_H(z) \in \mathcal{L}_S(z)$$

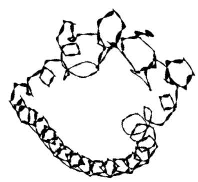
である．よって，ベクトル場 X_H の軌道は直線束 $\mathcal{L}_S$ によって，パラメータ付けを除いて完全に決定される．これは，周期軌道だけでなく，すべての解について言える．したがって，複雑な挙動を示す解の存在もすべては超曲面 S とシンプレクティック構造によって決まっているのである．我々はコンパクトエネルギー曲面上の周期解の存在定理を知っているが[6,7]，残念ながら，それ以外の解の挙動についてはほとんど何もわかっていないというのが現状である．幾何学と力学が交差する未開の地は大きく広がっている．

参考文献

1) V.I. Arnold: "Mathematical Methods of Classical Mechanics 2nd ed.", Graduate Texts in Math. **60**, Springer (1989).
2) V.I. Arnold, V.V. Kozlov and A.I. Neishtadt: "Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics, 3rd ed.", (Dynamical Systems III, Encyclopaeia of Math. Sci. Vol.3), Springer (2006).
3) E. Cartan: "Leçon sur les Invariant Integraux", Herman (1922); 日本語訳『カルタン：外微分形式の理論―積分不変式―』, 矢野健太郎訳, 白水社, (1964).
4) F. Diacu and P. Holmes: "Celestial Encounters—The Origins of Chaos and Stability—", Princeton UP (1996); 日本語訳『F. ディアク，P. ホームズ：天体力学のパイオニアたち 上下』，吉田春夫訳，シュプリンガー・ジャパン，(2004).
5) 深谷賢治：『解析力学と微分形式』，岩波書店 (2004).
6) 深谷賢治：『シンプレクティック幾何学』，岩波書店 (2008).
7) 伊藤秀一：ハミルトン力学系の周期解，「数理科学」1995 年 6 月号，pp.60–65.
8) 伊藤秀一：『常微分方程式と解析力学』, 共立出版 (1998).
9) 伊藤秀一：共鳴現象と KAM 理論，「数学セミナー」2009 年 7 月号，pp.33–37.
10) T. Kappeler and J. Pöschel: "KdV & KAM", Springer (2003).
11) A. Katok and B. Hasselblatt: "Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems", Cambridge (1995).
12) 國府寛司：『力学系の基礎』，朝倉書店 (2000).
13) J.E. Marsden and T.S. Ratiu: "Introduction to Mechanics and Symmetry, 2nd ed.", Texts in Applied Math. **17**, Springer (1999).
14) D. McDuff and D.S. Salamon: "Introduction to Symplectic Topology 2nd ed.", Oxford (1998).
15) 森田茂之：『微分形式の幾何学』，岩波書店 (2005).
16) J.K. Moser and E. Zehnder: "Notes on Dynamical Systems", Amer. Math. Soc. (2006).
17) H. Poincaré: "Les méthodes nouvelle de la mécanique céleste III", Gautier-Villars (1899), (A. Blanchard より復刻版 (1987))；日本語訳『ポアンカレ：常微分方程式』，福原満州雄・浦太郎訳，共立出版，(1970).
18) K.F. Siburg: "The Principle of Least Action in Geometry and Dynamics", Lecture Notes in Math. **1844**, Springer, (2004).
19) 田中和永：『変分問題入門』，岩波書店，(2008).

（いとう・ひでかず，金沢大学理工研究域）

シンプレクティック幾何とコーシー・リーマン方程式



赤穂　まなぶ

1. はじめに

シンプレクティック多様体の大域的な性質に関する本格的な研究は，グロモフ（M. Gromov）による**擬正則曲線**の理論に始まり，その後多くの数学者・数理物理学者たちの手を経てここ二十数年の間に驚異的な進歩を成し遂げた．中でも**アーノルド予想**を解くためにフレアー（A. Floer）によって導入された**フレアーホモロジー**の革新的なアイデアは，その後の大域シンプレクティック幾何の研究に大きな影響を与えた．そして擬正則曲線の理論は**ミラー対称性**などの新しい話題を続々と提供しながら，今もなお快進撃を続けている．

本稿ではグロモフによる正則円盤の存在定理を中心に，コーシー・リーマン方程式とそれに関わるシンプレクティック幾何の基本的な話題についていくつか触れてみたい．

2. シンプレクティック多様体

シンプレクティック多様体の起源は解析力学，とくにハミルトン方程式（正準方程式とも呼ばれる）の研究にまでさかのぼる．

ハミルトン方程式とは，時刻 t と座標 $x_1, \ldots, x_n$，一般運動量 $y_1, \ldots, y_n$ の関数 $H = H(t, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ を用いて

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

と書かれる，未知関数 $x_i(t), y_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, についての1階の常微分方程式系である．ここで H は**ハミルトン関数**と呼ばれ，天体の運動やバネの振動など，扱う問題ごとに異なった H が用いられる．

この変数 $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ の空間は**相空間**と呼ばれ，解析力学の目標はハミルトン方程式に従う相空間の点の振舞いを詳しく調べることであると言える．中でも惑星の公転や単振動のように周期的な運動を表す解は，物理的にも数学的にも非常に重要であり，ひときわ多くの人々の関心を集めてきた．

一方，ハミルトン方程式の解法を研究する過程で，人々は**正準変換**と呼ばれる変数変換に注目した．この正準変換の下で変数を $x_1, y_1, \ldots$ から $X_1, Y_1, \ldots$ に変換すると $dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_n \wedge dy_n = dX_1 \wedge dY_1 + \cdots + dX_n \wedge dY_n$ が成り立つことがわかる．これは $dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_n \wedge dy_n$ という2次の微分形式が，相空間 $\mathbb{R}^{2n} = \{(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)\}$ の本質的な構造であるということを示唆していた．

そこで我々はシンプレクティック多様体の定義に至る．

定義（シンプレクティック多様体） M を可微分多様体，ω を M 上の2次の微分形式とする．ω が次の2つの条件を満たすとき ω をシンプレクティック形式，また (M, ω) をシンプレク

ティック多様体と呼ぶ．

- M の各接ベクトル空間において ω は非退化な2次の交代形式を定める．
- $d\omega = 0$.

相空間 $(\mathbb{R}^{2n}, dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_n \wedge dy_n)$ は最も基本的かつ重要なシンプレクティック多様体である．

3. 大域シンプレクティック幾何

一口にシンプレクティック幾何と言ってもその内容は多岐に渡るが，幾何構造の研究という観点からするとその内容は大きく分けて

- 局所的な構造の研究,
- 大域的な構造の研究

の2つに分けられる．しかし前者に関しては既に決着がついている．つまりシンプレクティック多様体は局所的にはどれも相空間の開集合と同じであるということが知られている．これはリーマン幾何とは大きく異なる点である．

一方，後者に関しては非自明な結果が得られている．その最初の代表的なものが擬正則曲線の理論を用いて証明されたグロモフの**非圧縮定理**である．これは**シンプレクティック容量**と呼ばれる不変量を導入するきっかけとなった記念碑的な定理である．

定理（非圧縮定理） B_R, H_ε を

$$B_R = \left\{(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2) < R^2\right\},$$

$$H_\varepsilon = \{(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \mid x_n^2 + y_n^2 < \varepsilon^2\}$$

とし，また $\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_n \wedge dy_n$ とする．そのとき $R > \varepsilon$ ならば $f^*\omega = \omega$ となる埋め込み $f : B_R \to H_\varepsilon$ は存在しない．

この定理より，ただちに次の系が得られる．

系 $D(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le r^2\}$ とし, $D(r) \times D(R) \subset \mathbb{R}^4$ には標準的なシンプレクティック形式 ω を考える．そのとき $f^*\omega = \omega$ となる微分同相写像 $f : D(1) \times D(1) \to D(2) \times D(1/2)$ は存在しない．

$D(1) \times D(1)$ と $D(2) \times D(1/2)$ の間には体積要素を保つ微分同相写像が存在することに注意する．

この他にもシンプレクティック多様体の大域的な性質の研究には様々なものがある．主なものには

- **シンプレクティック同相写像**の研究,
- **周期ハミルトン系**の研究,
- **ラグランジュ部分多様体**の研究

などなど．これらは互いに関連し合い，そしてそのいずれにも擬正則曲線が効果的に用いられている．

4. 擬正則曲線

複素数 z を変数とする複素数値関数 $f(z)$ が z について微分可能なとき，$f(z)$ を正則関数と呼ぶ．よく知られているように，$f(z)$ が正則であるための必要十分条件は，$f(z)$ の実部 u と虚部 v が次の**コーシー・リーマン方程式**を満たすことである．

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

ただし変数 x, y はそれぞれ z の実部と虚部である．

この正則関数を一般化すると複素多様体から複素多様体への正則写像という概念にたどり着く．しかしここでは複素多様体よりも広いクラスの**概複素多様体**を扱い，正則写像に代わって**擬正則写像**を考える．

定義（概複素多様体） M を可微分多様体とし，写像 $J : TM \to TM$ は各接ベクトル空間に制限すると線型写像 $J : T_pM \to T_pM$ を定めるとする．このとき $J \circ J = -1$ となるならば J を概複素構造，(M, J) を概複素多様体と呼ぶ．

$z_1, \ldots, z_n$ を複素多様体の局所複素座標としたとき，各接ベクトル空間上に線型写像 J を

$$J\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad J\frac{\partial}{\partial y_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

と定義すると，J は概複素構造となる．

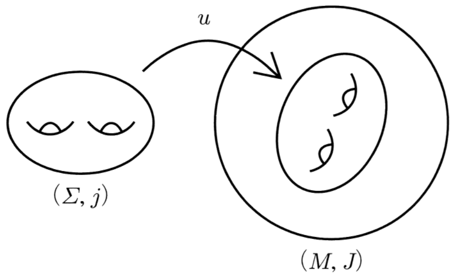


図 1　擬正則曲線.

定義（擬正則写像） $(M_1, J_1), (M_2, J_2)$ を概複素多様体，$f : M_1 \to M_2$ を写像とする．f の微分 $df : TM_1 \to TM_2$ が方程式

$$df \circ J_1 = J_2 \circ df$$

を満たすとき，f を擬正則写像と呼ぶ.

M_1, M_2 が複素多様体で J_1, J_2 をそこから自然に定まる概複素構造とすると，擬正則写像 $f : M_1 \to M_2$ はまさに正則写像になる.

実は擬正則写像の理論で重要になるのは定義域の概複素多様体の実次元が 2 のとき，つまりリーマン面からの擬正則写像の場合である．そのとき擬正則写像はとくに**擬正則曲線**と呼ばれる (図 1).

5. コーシー・リーマン方程式

(M, J) を概複素多様体，(Σ, j) をリーマン面とする．そのとき写像 $u : \Sigma \to M$ に対して

$$\bar{\partial}_J(u) = \frac{1}{2}(du + J \circ du \circ j)$$

と定義すると，$\bar{\partial}_J(u)$ は Σ 上の u^*TM に値を取る $(0,1)$ 形式になる．また $J \circ J = -1$ に注意すると

$$\bar{\partial}_J(u) = 0 \Leftrightarrow u \text{ は擬正則曲線}$$

であることがわかる．この方程式 $\bar{\partial}_J(u) = 0$ も**コーシー・リーマン方程式**と呼ぶ.

方程式 $\bar{\partial}_J(u) = 0$ は一般に J が u に依存しているので非線型の偏微分方程式であり，さらにその線型化方程式の主部はいわゆるコーシー・リーマン方程式と一致するので楕円型の偏微分方程式でもある．したがって $\bar{\partial}_J(u) = 0$ は 1 階の**非線型楕円型偏微分方程式**である.

また a をベクトル束 $\Lambda^{0,1}\Sigma \otimes TM \to \Sigma \times M$ の切断とすると，摂動されたコーシー・リーマン方程式

$$\bar{\partial}_J(u) = a$$

を考えることもできる．ただし右辺は a を $\{(z, u(z)) \mid z \in \Sigma\}$ に制限したものとする．するとこれも同様に 1 階の非線型楕円型偏微分方程式であることがわかる．ただし $a \neq 0$ ならば，u はもはや擬正則曲線ではない.

6. シンプレクティック多様体への擬正則曲線

擬正則曲線を考えるためには概複素構造が必要になるが，シンプレクティック多様体 (M, ω) には

- $\omega(v, Jv) > 0,\ v \neq 0,$
- $\omega(Jv_1, Jv_2) = \omega(v_1, v_2)$

となる ω と**整合的**な概複素構造 J が必ず存在する．これはちょうどケーラー多様体の複素構造の可積分条件が落ちた状態と同じである.

ここで一つ次の重要な定理を述べておく.

定理　(M, ω) をシンプレクティック多様体，J を ω と整合的な概複素構造，(Σ, j) をリーマン面とする．そのとき写像 $u : \Sigma \to M$ が擬正則曲線ならば

$$\int_\Sigma u^*\omega = \frac{1}{2}\int_\Sigma |du|^2$$

が成り立つ.

したがってこの定理より，擬正則曲線 u の表すホモロジー群の元が 0 ならば，u は定値写像であることがわかる.

さて，このようにいったん概複素構造の存在が保障されればシンプレクティック多様体への擬正則曲線を考えることができる．しかし非自明な (つまり定値写像ではない) 擬正則曲線が存在するか

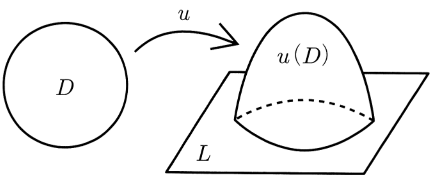


図 2　擬正則円盤.

という問題はそれとは別の話である.

非自明な擬正則曲線の存在定理として有名なものにグロモフによる次の定理がある. ただしその前に, まず準備として**ラグランジュ部分多様体**の定義から述べる.

定義（ラグランジュ部分多様体） シンプレクティック多様体 (M,ω) の部分多様体 L が次の 2 つの条件を満たすとき L をラグランジュ部分多様体と呼ぶ.

- $\dim L = \frac{1}{2}\dim M$.
- $\omega|_L = 0$.

例えば相空間 $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^2 \times \cdots \times \mathbb{R}^2$ の中の標準的なトーラス $S^1 \times \cdots \times S^1$ はラグランジュ部分多様体である.

次の定理では, $\mathbb{R}^{2n} = \{(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)\}$ と $\mathbb{C}^n = \{(x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)\}$ を同一視し, また $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ とする.

定理（正則円盤の存在） L をコンパクトで境界のない $\mathbb{C}^n$ のラグランジュ部分多様体とする. そのとき境界条件 $u(\partial D) \subset L$ を満たす非自明な正則写像 $u : D \to \mathbb{C}^n$ が存在する（図 2).

さて, この非自明な正則円盤の存在定理を用いると, $\mathbb{R}^{2n}$ におけるラグランジュ部分多様体のトポロジーについての情報が得られる.

定理　L をコンパクトで境界のない $\mathbb{R}^{2n}$ のラグランジュ部分多様体とする. そのとき $H^1(L;\mathbb{R}) \neq 0$.

証明の概略. 1 次の微分形式 $\lambda = x_1 dy_1 + \cdots + x_n dy_n$ を L に制限したものは $d\lambda|_L = \omega|_L = 0$ となるので $H^1(L;\mathbb{R})$ の元を定める. 一方, $u : D \to \mathbb{R}^{2n}$ を $u(\partial D) \subset L$ を満たす非自明な正則円盤とすると, $\int_D u^*\omega > 0$ であることがわかる. するとストークスの定理より $\int_{\partial D} u^*\lambda = \int_D u^*\omega \neq 0$ となり, λ の定める $H^1(L;\mathbb{R})$ の元は非自明となる.

7. バブルの解析

グロモフが非自明な正則円盤の存在を示すために考察したのが**バブル**である.

一般に摂動されたコーシー・リーマン方程式の解の発散列があると, その極限に $\mathbb{C}P^1$ もしくは $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ を定義域とする非自明な擬正則曲線が出現する. この現象をバブルと呼ぶ.

ここではそのバブルが起こるメカニズムを少し詳しく見てみよう.

(M,ω) をコンパクトで境界を持たないシンプレクティック多様体, J を ω と整合的な概複素構造, L をコンパクトで境界を持たないラグランジュ部分多様体とする. また $C < \infty$ とし, (Σ, j) をコンパクトなリーマン面, $u_i : \Sigma \to M$, $i = 1, 2, \ldots$ を

$$u(\partial\Sigma) \subset L, \quad \bar{\partial}_J(u) = a, \quad \int_\Sigma |du|^2 \leq C$$

を満たす写像とする.

このとき, もし u_i の微分が一様に有界ならば, u_i, $i = 1, 2, \ldots$ は収束する部分列を持ち, その極限は再び $u(\partial\Sigma) \subset L$, $\bar{\partial}_J(u) = a$, $\int_\Sigma |du|^2 \leq C$ を満たす. これはある種の**コンパクト性**を意味している. そしてこのときバブルは起きない.

そこで u_i の微分が一様に有界でないと仮定する. このとき Σ のある収束点列 $z_i \in \Sigma$, $i = 1, 2, \ldots$ が $R_i = |du_i(z_i)| = \max_{z\in\Sigma} |du_i(z)| \to \infty$ $(i \to \infty)$ となっているとしてよい.

もし z_i が Σ の内点に収束するか, もしくは緩やかに $\partial\Sigma$ の点に収束するならば, 写像 $v_i : \mathbb{C} \to M$ を $v_i(z) = u_i((z + z_i)/R_i)$ と定義すると, v_i, $i = 1, 2, \ldots$ は収束する部分列を持ち, その極限 $v : \mathbb{C} \to M$ は $\bar{\partial}_J(v) = 0$, $\int_\mathbb{C} |dv|^2 \leq C$ の非自明な解となる. すると**除去可能特異点定理**により, ある擬正則曲線 $\tilde{v} : \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to M$ が存在して $\tilde{v}|_\mathbb{C} = v$ となる.

また z_i が $\partial\Sigma$ の点に急速に収束するならば,

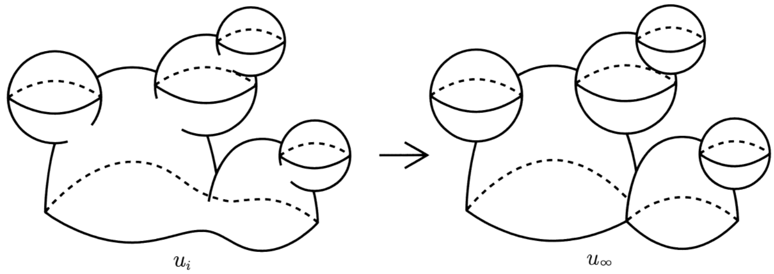


図 3　バブル．

$\mathbb{H}=\{x+\sqrt{-1}y\in\mathbb{C}\mid y\geq 0\}$ として，同様に写像 $v_i:\mathbb{H}\to M$ を定義すると，$v_i,\ i=1,2,\ldots$ は収束する部分列を持ち，その極限 $v:\mathbb{H}\to M$ は $v(\partial\mathbb{H})\subset L,\ \bar{\partial}_J(v)=0,\ \int_{\mathbb{H}}|dv|^2\leq C$ の非自明な解となる．するとこの場合も除去可能特異点定理により，ある擬正則曲線 $\tilde{v}:D=\mathbb{H}\cup\{\infty\}\to M$ が存在して $\tilde{v}(\partial D)\subset L,\ \tilde{v}|_{\mathbb{H}}=v$ となる．

このように摂動されたコーシー・リーマン方程式の解の発散列が存在すると，非自明な擬正則曲線が泡のように出現することがわかる（図 3）．

8. モジュライ空間

グロモフが非自明な正則円盤の存在を示すために用いたもう一つの重要な道具が**モジュライ空間**である．

(M,ω) をシンプレクティック多様体，J を ω と整合的な概複素構造，L をラグランジュ部分多様体とする．また (Σ,j) をコンパクトなリーマン面とする．そこで $\beta\in H_2(M,L;\mathbb{Z})$ に対して

$$\mathcal{N}(M,L,\beta,a)=\left\{u:\Sigma\to M\ \middle|\ \begin{array}{l}u(\partial\Sigma)\subset L\\ u_*[\Sigma]=\beta\\ \bar{\partial}_J(u)=a\end{array}\right\}$$

と定義する．さらに $\mathcal{N}(M,L,\beta,a)$ に次の規則で同値関係を与える．

$$\begin{array}{ll} & u_1,u_2\in\mathcal{N}(M,L,\beta,a)\text{ が同値}\\ \Leftrightarrow & \text{正則同型写像 }\varphi:\Sigma\to\Sigma\\ & \text{が存在して }u_1\circ\varphi=u_2\end{array}$$

この同値類の集合を $\mathcal{M}(M,L,\beta,a)$ と書くことにする．これが我々のモジュライ空間である．

また摂動項の滑らかな族 $\alpha=\{a_t\}_{t\in[0,1]}$ に対して

$$\mathcal{M}(M,L,\beta,\alpha)=\bigcup_{t\in[0,1]}\mathcal{M}(M,L,\beta,a_t)$$

と定義する．

9. モジュライ空間の局所理論

方程式 $\bar{\partial}_J(u)=a$ は 1 階の**非線型楕円型偏微分方程式**であり，このとき $\mathcal{N}(M,L,\beta,a)$ は有限次元の可微分多様体の構造を持つことが期待される．

そのことを説明するためにまず次の例から入ろう．可微分多様体 X 上のベクトル束 $E\to X$ とその切断 $s:X\to E$ に対して $N=\{p\in X\mid s(p)=0\}$ と定義する．そして N の各点 p において s の微分のファイバー方向への射影 $Ds:T_pX\to E_p$ が全射だと仮定する．そのとき**陰関数の定理**より N は可微分多様体になり，その次元は $\operatorname{Ker}Ds$ の次元に一致する．

実は我々の集合 $\mathcal{N}(M,L,\beta,a)$ もまさにこれと同様な状況にある．ただし今の場合，X に相当するものは条件 $u(\partial\Sigma)\subset L, u_*[\Sigma]=\beta$ を満たす写像 $u:\Sigma\to M$ の全体という**無限次元**の多様体 $\mathcal{X}$ であり，$E\to X$ にあたるものは $u\in\mathcal{X}$ のファイバーが $\Lambda^{0,1}\Sigma\otimes u^*TM\to\Sigma$ の切断の全体という**無限次元**のベクトル束 $\mathcal{E}\to\mathcal{X}$ であり，s に相当するものが $\boldsymbol{s}(u)=\bar{\partial}_J(u)-a$ となる．すると $\mathcal{N}(M,L,\beta,a)=\{u\in\mathcal{X}\mid\boldsymbol{s}(u)=0\}$ と書くことができる．また $\mathcal{N}(M,L,\beta,a)$ の各点 u における $\boldsymbol{s}$ の微分のファイバー方向への射影 $D\boldsymbol{s}:T_u\mathcal{X}\to$

$\mathcal{E}_u$ はフレドホルム作用素であることがわかる．つまり Ker Ds と Coker Ds の次元はそれぞれ有限となり，その指数 $\dim \mathrm{Ker}\, Ds - \dim \mathrm{Coker}\, Ds$ は指数定理を用いて計算することができる．

さて，陰関数の定理を用いて N が可微分多様体であることを示すためには Ds が全射である必要があった．残念ながら Ds は一般には全射とはならない．しかしいくつかの重要な場合において Ds は全射になることが知られており，そのときはやはり陰関数の定理より $\mathcal{N}(M, L, \beta, a)$ が可微分多様体であることが示され，その次元は $\dim \mathrm{Ker}\, Ds$ すなわち Ds の指数と一致することがわかる．

また $\mathcal{M}(M, L, \beta, a)$ は $\mathcal{N}(M, L, \beta, a)$ を同値関係で割った商空間であるが，これもまた多くの重要な場合に可微分多様体になることが知られている．

■ 10. バブルを起こすには… ■

これまでの議論で，もしバブルが起きれば $\mathbb{C}P^1$ もしくは D からの非自明な擬正則曲線が存在することがわかった．ではそのバブルを起こすには一体どうしたらよいのであろうか？

$\mathbb{C}^n$ には標準的なシンプレクティック形式と複素構造を考え，L を $\mathbb{C}^n$ のコンパクトで境界のないラグランジュ部分多様体とする．ただし $\mathbb{C}^n$ はコンパクトではないが，L は十分大きな複素トーラスのラグランジュ部分多様体とみなすことができるので，ここではあまり気にする必要はない．また $a \in \mathbb{C}^n$ とする．このとき境界条件 $u(\partial D) \subset L$ を満たす写像 $u : D \to \mathbb{C}^n$ に対して，摂動されたコーシー・リーマン方程式 $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = a$ を考える．ただし $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ である．するとまず次のことが成り立つ．

- ある定数 $C(L, a) < \infty$ が存在して，$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = a$ の解に対して $\int_D |du|^2 \le C(L, a)$ となる．
- $|a|$ が十分大きいとき，$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = a$ の解は存在しない．

そこで $\beta = 0$ とし，$a_0 = 0$, $|a_1|$ は十分大きい，となる適当な摂動項の滑らかな族 $\alpha = \{a_t \in$

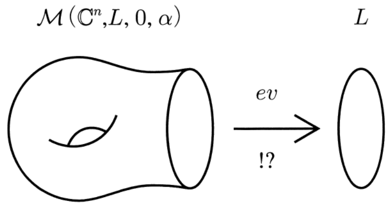


図 4　バブルが起こらないと仮定すると….

$\mathbb{C}^n\}_{t\in[0,1]}$ に対してモジュライ空間

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}^n, L, 0, \alpha) = \bigcup_{t\in[0,1]} \mathcal{M}(\mathbb{C}^n, L, 0, a_t)$$

を考える．すると

- $\mathcal{M}(\mathbb{C}^n, L, 0, a_0)$ は L への定値写像からなり，L と自然に同一視できる，
- $\mathcal{M}(\mathbb{C}^n, L, 0, a_1) = \emptyset$,
- **バブルが起きないと仮定すると** $\mathcal{M}(\mathbb{C}^n, L, 0, \alpha)$ はコンパクト，
- $\mathcal{M}(\mathbb{C}^n, L, 0, \alpha)$ は $n+1$ 次元の可微分多様体，
- $\partial\mathcal{M}(\mathbb{C}^n, L, 0, \alpha) = \mathcal{M}(\mathbb{C}, L, 0, a_0) \cup \mathcal{M}(\mathbb{C}^n, L, 0, a_1)$

であることがわかる．

したがって，$1 \in \partial D$ に注意して，写像

$$ev : \mathcal{M}(\mathbb{C}^n, L, 0, \alpha) \to L, \quad ev(u) = u(1)$$

を定義すると

- $\partial\mathcal{M}(\mathbb{C}^n, L, 0, \alpha) = \mathcal{M}(\mathbb{C}^n, L, 0, 0)$,
- $ev(\mathcal{M}(\mathbb{C}^n, L, 0, 0)) = L$

となる．しかしこれは L の基本類 $[L] \in H_n(L; \mathbb{Z}_2)$ が 0 でないことに矛盾する（図 4）．よって背理法により，**どこかで必ずバブルが起こらなければならない！！**

最後に $\mathbb{C}P^1$ から $\mathbb{C}^n$ への正則写像は定値写像に限ることに注意すると，これで境界条件 $u(\partial D) \subset L$ を満たす非自明な正則円盤 $u : D \to \mathbb{C}^n$ が存在することがわかった．

■　11. まとめ　■

グロモフの擬正則曲線の理論のポイントとなったのはバブルとモジュライ空間であった．その伏線には以前から知られていた

- 調和写像・極小曲面のバブルの解析，
- 複素構造の変形理論，
- 反自己双対接続のモジュライ空間

などがあったものと思われる．特にモジュライ空間をコボルディズム論的に用いるその手法は，我々にドナルドソン（S. Donaldson）による反自己双対接続のモジュライ空間の 4 次元トポロジーへの最初の応用を思い起こさせる．

そもそも，リーマン面から複素多様体への正則写像は，複素幾何もしくは代数幾何において精力的に研究されていた．ところがグロモフは，複素構造の可積分条件を捨て去ることにより，それを擬正則曲線の理論へと生まれ変わらせ，大域シンプレクティック幾何の問題に応用した．

さて，グロモフによる擬正則曲線の理論は，その後フレアーによって導入されたフレアーホモロジーの理論において一役買うことになる．

フレアーホモロジーにはいくつかのバージョンがあるが，シンプレクティック幾何では主に

- ラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジー，
- 周期ハミルトン系のフレアーホモロジー

の 2 つが知られている．それらはループ空間上の変分法を背景に，ウィッテン（E. Witten）による超対称性とモース理論の研究をきっかけとし，グロモフによる擬正則曲線の理論とタウベス（C.H. Taubes）による反自己双対接続の貼り合せの解析を技術面での支えとして，アーノルド予想を解くために導入された．

これはあくまで筆者の受けた印象であるが，グロモフは擬正則曲線を複素幾何・代数幾何からシンプレクティック幾何へと移植し，問題を解くためにそれを巧妙に用いたが，一方フレアーは，ループ空間のモースホモロジーという立場から，ごく自然にシンプレクティック幾何において擬正則曲線に出会ったのではないだろうか….

以上，シンプレクティック幾何とコーシー・リーマン方程式ということで，擬正則曲線の理論の基本的な内容について解説を行った．擬正則曲線の理論は現在世界中で盛んに研究されており，今後

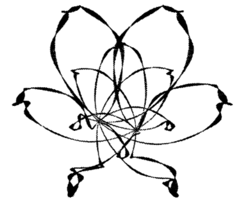
もさらに我々に新たな大域シンプレクティック幾何の世界を見せてくれるものと思われる．

参考文献

1) 赤穂まなぶ，『ラグランジュ部分多様体のフレアーホモロジー入門』，第5回城崎新人セミナー報告集 (2008). http://diana.math.kyoto-u.ac.jp/insei/proceeding/2008/akaho.pdf よりダウンロード可．
2) A. Floer, Morse theory for Lagrangian intersections, *J. Differ. Geom.* **28**, No.3, 513–547 (1988).
3) A. Floer, Symplectic fixed points and holomorphic spheres, *Comm. Math. Phys.* **120**, No.4, 575–611 (1989).
4) 深谷賢治，『シンプレクティック幾何学』，岩波書店 (2008).
5) M. Gromov, Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.* **82**, 307–347 (1985).
6) D. McDuff and D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, 2nd edition, Oxford University Press (1998).
7) D. McDuff and D. Salamon, *J-holomorphic Curves and Symplectic Topology*, American Mathematical Society, Colloquium Publications Volume **52** (2004).

（あかほ・まなぶ，首都大学東京大学院理工学研究科）

算術幾何平均にひそむ幾何学・方程式



松本　圭司

本稿では算術幾何平均にひそんでいる幾何学とそれに関わる関数たちのみたす関係式について解説する．また，多項版平均反復に関する最新の結果も紹介する．

1. 算術幾何平均

正の実数全体のなす集合を $\mathbb{R}_+$ で表す．集合 $(\mathbb{R}_+)^2$ 上の連続関数

$$m_1(x,y)=\frac{x+y}{2},\quad m_2(x,y)=\sqrt{xy}$$

をそれぞれ算術平均（相加平均）と幾何平均（相乗平均）と呼ぶ．これらの平均を用いて $(\mathbb{R}_+)^2$ から $(\mathbb{R}_+)^2$ への写像 m を

$$m(x,y)=(m_1(x,y),m_2(x,y))$$

で与える．そして $\mathbb{R}_+$ の二元 a,b で $a\geq b$ をみたすものに対して，二重数列 $(a_n,b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$(a_n,b_n)=\overbrace{m\circ\cdots\circ m}^{n}(a,b)=m^n(a,b)$$

で定める．つまり二重数列 $(a_n,b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は，初項 (a_0,b_0) を (a,b) で与え，漸化式

$$(a_{n+1},b_{n+1})=\left(\frac{a_n+b_n}{2},\sqrt{a_nb_n}\right)$$

により定めたものである．2 つの平均の性質より

$$b\leq b_1\leq\cdots\leq b_n\leq a_n\leq\cdots\leq a_1\leq a$$

なので，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はともに有界単調数列となり，収束することがわかる．また，等式

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$$

で，両辺の $n\to\infty$ としたときの極限を考えれば $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$ となる．この共通極限を a と b との算術幾何平均と言い，$m_*^\infty(a,b)$ で表す．もちろん

$$\lim_{n\to\infty}m^n(a,b)=(m_*^\infty(a,b),m_*^\infty(a,b))$$

となっている．二重数列 $(a_n,b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の収束性は容易に示せたが，算術幾何平均 $m_*^\infty(a,b)$ を a,b を用いて表示することはかなりの難問である．その答えを最初に与えたのは C.F. Gauss であり，文献 8,10,11) 等に記載されているようにさらにその重要性にも言及している．

定理 1（C.F. Gauss）

$$\frac{a}{m_*^\infty(a,b)}=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}}.$$

ここで $\lambda=1-b^2/a^2$ である．

現在ではこの定理の証明方法がいくつか知られている．次節で不変原理と置換積分法による手段を紹介する．

2. 定理 1 の証明

算術幾何平均を表示する関数の候補が見つかっ

たならば，実際にその関数がそうであることを証明するには以下の原理を用いればよい．

定理 2（不変原理） 領域 $D = \{(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mid a \geq b\}$ 上の連続関数 $\mu(a,b)$ が
(i) $\mu(a,a) = a$ for $^\forall a \in \mathbb{R}_+$,
(ii) $\mu(m(a,b)) = \mu(a,b)$ for $^\forall (a,b) \in D$
をみたすならば，$\mu(a,b)$ は算術幾何平均 $m_*^\infty(a,b)$ と一致する．

証明. 条件 (ii) を繰返し用いることにより

$$\mu(a,b) = \mu(m(a,b)) = \cdots = \mu(m^n(a,b))$$

となる．関数 μ の連続性と条件 (i) より

$$\lim_{n\to\infty} \mu(m^n(a,b)) = \mu(\lim_{n\to\infty} m^n(a,b))$$
$$= \mu(m_*^\infty(a,b), m_*^\infty(a,b)) = m_*^\infty(a,b)$$

を得る． □

定理 1 の証明. 関数 $\mu(a,b)$ を

$$\mu(a,b) = \pi a \Big/ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}}$$

で定める．この関数が定理 2 の条件 (i), (ii) をみたすことを示せばよい．条件 (i) は容易に得られる．実際 $a = b$ のとき $\lambda = 0$ となり，積分はベータ関数 $B(1/2, 1/2)$ に退化しその値は π である．条件 (ii) は

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}}$$
$$= \frac{2a}{a+b} \int_0^1 \frac{dx'}{\sqrt{x'(1-x')(1-\lambda' x')}}$$

と同値である．ここで $\lambda' = 1 - 4ab/(a+b)^2$ である．この等式を示すには，上辺の積分を変数変換

$$x = \frac{4\sqrt{\lambda'}x'}{\lambda(\sqrt{\lambda'}x' + 1)^2} \qquad (1)$$

による置換積分法で計算すればよい．この変換内の $\sqrt{\lambda'}$ は $(a-b)/(a+b)$ であり，変数 x' が開区間 $(0,1)$ を動くとき変数 x も $(0,1)$ を動くことはすぐにわかるので，あとは被積分関数の変形を実行すればよい． □

定理 1 の証明は得られたが，この証明内の不思議な変数変換 (1) をどのようにして見つけたのか，それがいかなる意味をもつのか，と疑問をもたれる読者も多いのではないかと思う．以下で算術幾何平均に関係する楕円曲線と輪環面を解説し，変数変換 (1) の幾何学的解釈を紹介する．

3. 楕円曲線 $C(\lambda)$ と輪環面 $E(\tau)$

定理 1 に現れる積分は楕円積分と呼ばれる．それは $\mathbb{C}^2$ 内の 3 次曲線

$$C(\lambda) : y^2 = x(1-x)(1-\lambda x)$$

$(\lambda \in \mathbb{C} - \{0,1\})$ 上の微分形式 dx/y の積分と見なすことができる．無限遠直線を $\mathbb{C}^2$ に加えた射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内で $C(\lambda)$ を考えると，無限遠直線上の一点 P_∞ が $C(\lambda)$ に自然に加わる．それを楕円曲線と呼び，同じ記号 $C(\lambda)$ で表すことにする．楕円曲線 $C(\lambda)$ 上の微分形式 dx/y は $x = 0, 1, 1/\lambda$ で定まる 3 点 $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1,0)$, $P_\lambda = (1/\lambda, 0)$ や無限遠点 P_∞ で極とならずに正則であり，$C(\lambda)$ 内の任意の滑らかな曲線上で線積分が可能となる．以下の線積分で複素数 τ_A, τ_B を定める：

$$\tau_A = \int_{P_1}^{P_\lambda} \frac{dx}{y}, \quad \tau_B = \int_{P_0}^{P_1} \frac{dx}{y}.$$

ここで，P_1 から P_λ への積分路と P_0 から P_1 への積分路は λ が開区間 $(0,1)$ にあるときには x-座標は閉区間 $[1, 1/\lambda]$ と $[0,1]$ を動くものとし，そのときの y-座標の値がそれぞれ $-\sqrt{-1}\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+$ となるように定める．一般の λ に対しては，それを連続的に変形することで定める．複素数 $\tau = \tau_A/\tau_B$ は上半空間 $\mathbb{H}$ に属し，τ で定まる格子群 $\{m\tau + n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ を $L(\tau)$ とする．複素平面 $\mathbb{C}$ を加法群と見なし，この格子群で割ってできる商空間 $\mathbb{C}/L(\tau)$ を $E(\tau)$ とする．この商空間 $E(\tau)$ は $1, \tau$ で張られる平行四辺形 H_τ を完全代表系とし，H_τ の上下の辺および左右の辺が同一視され，輪環面と位相的に同型である．

命題 1　楕円曲線 $C(\lambda)$ と輪環面 $E(\tau)$ は，写像

$$\varphi : C(\lambda) \ni P \mapsto \frac{1}{2\tau_B}\int_{P_\infty}^{P} \frac{dx}{y} \in E(\tau)$$

により同型である．また，$\varphi(P_\infty) = [0]$, $\varphi(P_0) = [\frac{\tau}{2}]$, $\varphi(P_1) = [\frac{\tau+1}{2}]$, $\varphi(P_\lambda) = [\frac{1}{2}]$. ここで $[z]$ は z で代表される $E(\tau)$ の元を表す．

注意 1　写像 φ を単に積分値を考えて $\mathbb{C}$ への写像とすると，局所的には一価正則写像だが，大域的には一価とならない．解析接続により，$L(\tau)$ の元が加わることが起こり得る．その相違分の群 $L(\tau)$ で割ることで多価性を打ち消し，輪環面 $E(\tau)$ への一価正則写像を得ている．

写像 φ の逆写像は，楕円関数を用いて構成できることが知られている．本稿ではテータ関数を用いて具体的に与える．4 つのテータ関数 $\vartheta_c(z,\tau)$ $(c = (c_1, c_2) \in \{0,1\}^2)$ を級数

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{e}\left[\left(n+\frac{c_1}{2}\right)^2\tau + 2\left(n+\frac{c_1}{2}\right)\left(z+\frac{c_2}{2}\right)\right]$$

で定める．ここで $\mathbf{e}[z] = \exp(\pi\sqrt{-1}z)$ とする．これらの関数は以下の性質をみたす直積空間 $\mathbb{C}\times\mathbb{H}$ 上の正則関数となる：

$$\vartheta_c(z,\tau) = \mathbf{e}\left[\frac{c_1^2}{4}\tau + c_1\left(z+\frac{c_2}{2}\right)\right]\vartheta_{00}(z+c_L,\tau),$$
$$\vartheta_c(-z,\tau) = (-1)^{c_1c_2}\vartheta_c(z,\tau),$$
$$\vartheta_c(z+1,\tau) = (-1)^{c_1}\vartheta_c(z,\tau),$$
$$\vartheta_c(z+\tau,\tau) = (-1)^{c_2}\mathbf{e}[-\tau-2z]\vartheta_c(z,\tau).$$

ここで $c_L = \frac{c_1\tau+c_2}{2}$ とする．これらの性質と複素関数論で習う偏角の原理より，下記の命題を得る．

命題 2　テータ関数 $\vartheta_c(z,\tau)$ を τ を固定して z の関数とみなしたとき，平行四辺形 H_τ 内に 1 位の零点を一つだけもつ．その零点は $L(\tau)$ を法として $\frac{(c_1+1)\tau+(c_2+1)}{2}$ と同値な点である．

また，テータ関数は以下の加法公式をみたすことが知られている．証明は文献 11) を参照せよ．

補題 1（加法公式）

$$\vartheta_{00}^2\vartheta_{11}(z+w)\vartheta_{11}(z-w)$$
$$= \vartheta_{11}^2(z)\vartheta_{00}^2(w) - \vartheta_{00}^2(z)\vartheta_{11}^2(w)$$
$$= \vartheta_{01}^2(z)\vartheta_{10}^2(w) - \vartheta_{10}^2(z)\vartheta_{01}^2(w).$$

ここでは省略記号 $\vartheta_c(z) = \vartheta_c(z,\tau)$, $\vartheta_c = \vartheta_c(0,\tau)$ を用いている．

さて，逆写像 φ^{-1} を与えることは，輪環面 $E(\tau)$ の各点 $[z]$ に楕円曲線 $C(\lambda)$ の点 (x,y) を指定することを意味する．点 (x,y) の x-座標と y-座標を楕円曲線 $C(\lambda)$ 上の有理型関数と見なし，φ により対応する楕円関数を $\vartheta_c(z,\tau)$ たちで表示すればよい．

定理 3　逆写像 φ^{-1} は以下で与えられる：

$$\varphi^{-1} : E(\tau) \ni [z] \mapsto (x(z), y(z)) \in C(\lambda),$$
$$x(z) = \frac{\vartheta_{00}^2(0,\tau)}{\vartheta_{10}^2(0,\tau)}\frac{\vartheta_{01}^2(z,\tau)}{\vartheta_{11}^2(z,\tau)},$$
$$y(z) = \frac{\vartheta_{01}^2(0,\tau)}{\vartheta_{10}^2(0,\tau)}\frac{\prod_{c\in\{0,1\}^2}\vartheta_c(z,\tau)}{\vartheta_{11}^4(z,\tau)}.$$

証明. $C(\lambda)$ の x-座標は P_0 を 2 位の零点，P_∞ を 2 位の極とする有理型関数なので，φ により $[\frac{\tau}{2}]$ を 2 位の零点，$[0]$ を 2 位の極とする楕円関数 $\vartheta_{01}^2(z,\tau)/\vartheta_{11}^2(z,\tau)$ と対応する．定数倍を P_1 での値で調整し $x(z)$ を得る．一方，y-座標は 4 点 $[\frac{c_1\tau+c_2}{2}]$ を 1 位の零点，$[0]$ を 4 位の極とする楕円関数に対応する．関数 $y(z)$ の定数倍の調整は，$x(z)$ と $y(z)$ が $C(\lambda)$ の定義方程式をみたすように実施する．その際，加法公式で $w = 0$ と $w = \tau/2$ を代入して得られる等式を用いる．□

加法公式で $z = \frac{\tau+1}{2}$, $w = 0$ を代入すると Jacobi の恒等式

$$\vartheta_{00}^4(0,\tau) = \vartheta_{01}^4(0,\tau) + \vartheta_{10}^4(0,\tau)$$

が得られる．また，$P_\lambda = (1/\lambda, 0)$ と $\varphi(P_\lambda) = \frac{1}{2}$ との対応を考えれば下記が得られる．

系 1 楕円曲線 $C(\lambda)$ を定める媒介変数 λ は，$\tau \in \mathbb{H}$ を用いて以下のように表示できる：

$$\lambda = \frac{\vartheta_{10}^4(0,\tau)}{\vartheta_{00}^4(0,\tau)} = 1 - \frac{\vartheta_{01}^4(0,\tau)}{\vartheta_{00}^4(0,\tau)}.$$

さらに文献 11) にある Jacobi の微分公式

$$\frac{\partial \vartheta_{11}}{\partial z}(0,\tau) = -\pi\vartheta_{00}(0,\tau)\vartheta_{01}(0,\tau)\vartheta_{10}(0,\tau)$$

を用いると下記の公式が得られる．

系 2 (Jacobi の周期公式)

$$\tau_B = \int_{P_0}^{P_1} \frac{dx}{y} = \pi\vartheta_{00}^2(0,\tau).$$

証明． 楕円曲線 $C(\lambda)$ 上の正則微分形式 dx/y を φ^{-1} で $E(\tau)$ に引戻すと

$$2\frac{\vartheta_{00}^2}{\vartheta_{01}^2}\frac{\vartheta_{11}(z)\vartheta_{01}'(z) - \vartheta_{11}'(z)\vartheta_{01}(z)}{\vartheta_{00}(z)\vartheta_{10}(z)}dz$$

となる．ここで $\vartheta_c'(z) = \frac{\partial\vartheta_c}{\partial z}(z,\tau)$ とする．輪環面 $E(\tau)$ 上の正則微分形式は dz の定数倍なので，上記微分形式の dz の係数関数は z によらない定数である．この関数に $z=0$ を代入し，Jacobi の微分公式を用いれば $(\varphi^{-1})^*(\frac{dx}{y}) = 2\pi\vartheta_{00}^2 dz$ となる．点 P_0 と P_1 を結ぶ積分路が閉区間 $[0,1/2]$ に対応しているので，この系を得る． □

4. 二重被覆 $pr: E(2\tau) \to E(\tau)$

上半空間の元 τ を 2 倍にしてできる輪環面 $E(2\tau)$ から輪環面 $E(\tau)$ へは自然な写像

$$pr: E(2\tau) \to E(\tau)$$

がある．この写像は $z \in \mathbb{C}$ の入る $E(2\tau)$ での同値類を z の入る $E(\tau)$ での同値類と思い直せと言うものである．複素平面の 2 元 z と $z+\tau$ は $E(2\tau)$ の元と見なせば，異なる同値類に属するが，$E(\tau)$ の元と見なせば同じ同値類に属する．写像 pr は 2 : 1 の写像であるので，$E(2\tau)$ は $E(\tau)$ の二重被覆であると言う．この状況は商空間の完全代表系を与える平行四辺形 H_τ と $H_{2\tau}$ を考えれ

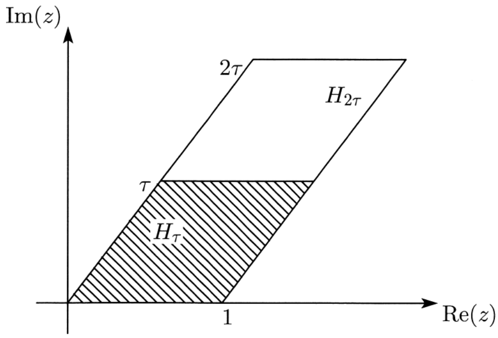


図 1　$E(\tau)$, $E(2\tau)$ の完全代表系 H_τ, $H_{2\tau}$.

ば，幾何学的に容易に理解できる（図 1）．また，写像

$$\imath' : E(2\tau) \ni [z] \mapsto [z+\tau] \in E(2\tau)$$

は被覆変換と呼ばれ，$\imath' \circ \imath' = id_{E(2\tau)}$, $pr \circ \imath' = pr$ をみたす．

さて，前節で構成した写像 φ^{-1} により $E(2\tau)$ と対応する楕円曲線を C' とする．二重被覆 $pr : E(2\tau) \to E(\tau)$ の構造を C' と $C(\lambda)$ との関係に翻訳することを試みる．そのために，文献 11) にある以下の公式を用意する．

補題 2（$(z/2)$-公式）

$$\begin{aligned}
&\vartheta_{01}(z)\vartheta_{00}^2\vartheta_{01} \\
&= \vartheta_{00}^2\left(\frac{z}{2}\right)\vartheta_{01}^2\left(\frac{z}{2}\right) + \vartheta_{10}^2\left(\frac{z}{2}\right)\vartheta_{11}^2\left(\frac{z}{2}\right), \\
&\vartheta_{11}(z)\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10} \\
&= 2\vartheta_{00}\left(\frac{z}{2}\right)\vartheta_{01}\left(\frac{z}{2}\right)\vartheta_{10}\left(\frac{z}{2}\right)\vartheta_{11}\left(\frac{z}{2}\right).
\end{aligned}$$

命題 3（$(2z, 2\tau)$-公式）

$$\begin{aligned}
\vartheta_{00}(2z, 2\tau) &= \frac{\vartheta_{00}^2(z,\tau) + \vartheta_{01}^2(z,\tau)}{2\vartheta_{00}(0,2\tau)}, \\
\vartheta_{10}(2z, 2\tau) &= \frac{\vartheta_{10}^2(z,\tau) - \vartheta_{11}^2(z,\tau)}{2\vartheta_{00}(0,2\tau)}, \\
\vartheta_{01}(2z, 2\tau) &= \frac{\vartheta_{00}(z,\tau)\vartheta_{01}(z,\tau)}{\vartheta_{01}(0,2\tau)}, \\
\vartheta_{11}(2z, 2\tau) &= \frac{\vartheta_{10}(z,\tau)\vartheta_{11}(z,\tau)}{\vartheta_{01}(0,2\tau)}.
\end{aligned}$$

この命題の等式に $z=0$ を代入して得られる式と系 1 により，楕円曲線 C' の媒介変数 λ' は，

$$\lambda' = 1 - \frac{\vartheta_{01}^4(2\tau)}{\vartheta_{00}^4(2\tau)} = 1 - \frac{4\vartheta_{00}^2(\tau)\vartheta_{01}^2(\tau)}{(\vartheta_{00}^2(\tau) + \vartheta_{01}^2(\tau))^2}$$

となる．以後 $E(2\tau)$ に対応する楕円曲線 C' を $C(\lambda')$ で表す．また，$\vartheta_{01}^2(\tau)/\vartheta_{00}^2(\tau) = b/a$ と見なせば，第 1 節で用いた記号 λ' とも整合している．

定理 4　写像 $pr : E(2\tau) \to E(\tau)$ は φ により，$C(\lambda')$ から $C(\lambda)$ への写像 pr_C に翻訳される：

$$\begin{aligned}
&pr_C : C(\lambda') \ni (x', y') \mapsto (x, y) \in C(\lambda), \\
&x = \frac{1}{4}(\sqrt{\lambda'}x' + 2 + (\sqrt{\lambda'}x')^{-1}), \\
&y = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{1-\lambda})\sqrt{\lambda'}(1 - (\sqrt{\lambda'}x')^{-2})y'.
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\lambda} = \frac{\vartheta_{10}^2(0,\tau)}{\vartheta_{00}^2(0,\tau)}, \quad \sqrt{1-\lambda} = \frac{\vartheta_{01}^2(0,\tau)}{\vartheta_{00}^2(0,\tau)}, \\
&\sqrt{\lambda'} = \frac{\vartheta_{10}^2(0,2\tau)}{\vartheta_{00}^2(0,2\tau)} = \frac{\vartheta_{00}^2(0,\tau) - \vartheta_{01}^2(0,\tau)}{\vartheta_{00}^2(0,\tau) + \vartheta_{01}^2(0,\tau)}
\end{aligned}$$

とする．また，$E(2\tau)$ の被覆変換 $\imath'$ は φ により $C(\lambda')$ から $C(\lambda')$ への写像

$$\jmath' : (x', y') \mapsto \left(\frac{1}{\lambda' x'}, \frac{-y'}{\lambda' x'^2}\right)$$

に変換され，$\jmath' \circ \jmath' = id_{C(\lambda')}$, $pr_C \circ \jmath' = pr_C$ をみたす．

証明． 関数 $x(z), y(z)$ の $\vartheta_c(z, 2\tau)$ による表示を与えればよい．関数 $x(z), y(z)$ 内の $\vartheta_{c_1 1}^2(z,\tau)$ に対しては，まず $(z/2)$-公式を使い，得られた式内の $\vartheta_{c_1 0}(z/2,\tau)\vartheta_{c_1 1}(z/2,\tau)$ に $(2z, 2\tau)$-公式を用いる．関数 $y(z)$ 内の $\prod_{c\in\{0,1\}^2}\vartheta_c(z,\tau)$ に対しては，まず，$\vartheta_{c_1 0}(z,\tau)\vartheta_{c_1 1}(z,\tau)$ に $(2z, 2\tau)$-公式を使い，得られた式内の $\vartheta_{c_1 1}(2z, 2\tau)$ に $(z/2)$-公式を用いる．定数倍の調整には，公式

$$2\vartheta_{00}(0,2\tau)\vartheta_{10}(0,2\tau) = \vartheta_{10}^2(0,\tau)$$

を利用する．写像 $\jmath'$ は $x(z), y(z)$ の表示式の z に $z+\tau$ を代入すれば得られる．　□

輪環面の世界でごく自然に定義された写像 pr は，同型 φ をテータ関数の公式を用いて追跡することにより，楕円曲線間の写像 pr_C に変換された．

変数変換 (1) は，多少複雑な形に変身した pr_C と楕円曲線 $C(\lambda)$ 上の被覆変換

$$\jmath : C(\lambda) \ni (x,y) \mapsto \left(\frac{1}{\lambda x}, \frac{-y}{\lambda x^2}\right) \in C(\lambda)$$

との合成 $\jmath \circ pr_C : C(\lambda') \ni (x',y') \mapsto (x,y) \in C(\lambda)$

$$x = \frac{4\sqrt{\lambda'}x'}{\lambda(\sqrt{\lambda'}x'+1)^2},$$
$$y = \frac{-2\sqrt{\lambda'}(\sqrt{\lambda'}x'-1)y'}{(1-\sqrt{1-\lambda})(\sqrt{\lambda'}x'+1)^3}$$

から得られる．この変換が算術幾何平均に関する異なる 2 つの楕円曲線 $C(\lambda), C(\lambda')$ 上の 2 つの楕円積分間の関係式を与えてくれるわけである．

$$\begin{array}{ccc} C(\lambda') & \xrightarrow{\varphi} & E(2\tau) \\ {\scriptstyle pr_C} \downarrow {\scriptstyle (2:1)} & & {\scriptstyle pr} \downarrow {\scriptstyle (2:1)} \\ C(\lambda) & \xrightarrow{\varphi} & E(\tau) \\ {\scriptstyle \jmath} \downarrow {\scriptstyle (1:1)} & & {\scriptstyle \imath} \downarrow {\scriptstyle [z] \mapsto [z+\frac{\tau}{2}]} \\ C(\lambda) & \xrightarrow{\varphi} & E(\tau) \end{array}$$

5. 超幾何関数

この節では算術幾何平均と超幾何関数の関係を解説する．超幾何関数は収束半径が 1 のべき級数

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)} z^n$$

で定義される．ここで $\gamma \neq 0,-1,-2,\ldots$, $(\alpha,n) = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ である．この関数は超幾何微分方程式

$$z(1-z)\frac{d^2f}{dz^2} + (\gamma-(\alpha+\beta+1)z)\frac{df}{dz} - \alpha\beta f = 0$$

をみたし，積分表示

$$\frac{1}{B(\alpha,\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}dt$$

を持つことが知られている．$(\alpha,\beta,\gamma) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$ の場合の積分表示と定理 1 の楕円積分と比較することで，算術幾何平均は

$$m_*^\infty(a,b) = a/F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;1-\frac{b^2}{a^2}\right)$$

と表示できる．一方，平均反復による不変性 $m_*^\infty(m(a,b)) = m_*^\infty(a,b)$ に対応する超幾何関数のみたす方程式は

$$\frac{(1+z)/2}{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;1-\frac{4z}{(1+z)^2}\right)} = \frac{1}{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;1-z^2\right)}$$

となる．この公式は超幾何微分方程式から示すことができる．つまり，上記の公式を超幾何微分方程式で証明すれば，定理 1 の別証が得られる．

次節でこの考えで得られる算術幾何平均の多項版をいくつか紹介する．

6. 多項版平均反復

Lauricella の k-変数超幾何関数 $F_D(\alpha,\beta,\gamma;z)$ は以下のべき級数で定義される：

$$\sum_{n_1,\ldots,n_k\geq 0}^{\infty} \frac{\left(\alpha, \sum_{j=1}^k n_j\right)\prod_{j=1}^k(\beta_j,n_j)}{\left(\gamma, \sum_{j=1}^k n_j\right)\prod_{j=1}^k(1,n_j)} \prod_{j=1}^k z_j^{n_j}.$$

ここで $z = (z_1,\ldots,z_k)$ は $|z_j| < 1$ $(j=1,\ldots,k)$ をみたし，$\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_k)$, $\gamma \neq 0,-1,-2,\ldots$ とする．文献 2) にあるように，超幾何関数 $F_D(\alpha,\beta,\gamma;z)$ についても微分方程式や積分表示が知られている．

3 種類の 3 項平均を下記のように定める：

$$m_1(x_1,x_2,x_3) = \frac{\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_3}}{2},$$
$$m_2(x_1,x_2,x_3) = \frac{\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_2x_3}}{2},$$
$$m_3(x_1,x_2,x_3) = \frac{\sqrt{x_1x_3}+\sqrt{x_2x_3}}{2}.$$

写像 $m : (\mathbb{R}_+)^3 \ni x \mapsto m(x) \in (\mathbb{R}_+)^3$ を $m(x) = (m_1(x), m_2(x), m_3(x))$ で定義する．3 つの正数 $a > b > c > 0$ に対して，3 重数列を $(m^n(a,b,c))_{n\in\mathbb{N}}$ で定める．

定理 5（文献 7)） この 3 重数列は収束し，共通極限 $m_*^\infty(a,b,c)$ をもつ．それは 2 変数 F_D で下記のように表示できる：

$$m_*^\infty(a,b,c)=\frac{a}{F_D\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2};1-\frac{b}{a},1-\frac{c}{a}\right)}.$$

4 種類の 4 項平均を下記のように定める：

$$m_1(x)=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},$$
$$m_2(x)=\frac{\sqrt{(x_1+x_4)(x_2+x_3)}}{2},$$
$$m_3(x)=\frac{\sqrt{(x_1+x_3)(x_2+x_4)}}{2},$$
$$m_4(x)=\frac{\sqrt{(x_1+x_2)(x_3+x_4)}}{2}.$$

写像 $m:(\mathbb{R}_+)^4\ni x\mapsto m(x)\in(\mathbb{R}_+)^4$ を $m(x)=(m_1(x),\ldots,m_4(x))$ で定義する．4 つの正数 $a>b>c>d>0$ に対して，4 重数列を $(m^n(a,b,c,d))_{n\in\mathbb{N}}$ で定める．

定理 6（文献 3)） この 4 重数列は収束し，共通極限 $m_*^\infty(a,b,c,d)$ をもつ．それは 3 変数 F_D で下記のように表示できる：

$$m_*^\infty(a,b,c,d)=\frac{a}{F_D\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},1;1-\frac{b^2}{a^2},1-\frac{c^2}{a^2},1-\frac{d^2}{a^2}\right)^2}.$$

算術幾何平均の多項版の研究は 1876 年の C.W. Borchardt による 4 項平均反復に関する結果[1] がある．それ以後の長い期間に，めざましい結果は得られていない．最近になって小池健二氏と志賀弘典氏の共同研究により，2 つの 3 項平均反復に関する結果 4, 5) が得られている．また文献 6) では，楕円曲線の周期積分の代わりに，射影平面の 6 直線で分岐する 2 重被覆で得られる K3 曲面の周期積分を考察することにより，C.W. Borchardt の結果だけでなく，さらに別の 4 項平均反復に関する結果を導くことができた．しかしながらまだ文献 8) にもある古くから知られる未解決問題の答えを導くには至っていない．その答えを導く幾何学や方程式に出会えることを期待している．

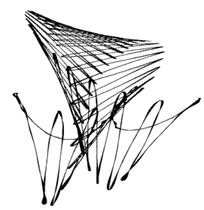
参考文献

1) C.W. Borchardt, Über das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen, *Berl. Monatsber*, **53** (1876), 611–621.
2) K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, *From Gauss to Painlevé*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1991.
3) T. Kato and K. Matsumoto, The common limit of a quadruple sequence and the hypergeometric function F_D of three variables, *Nagoya Math. J.* **195** (2009), 113–124.
4) K. Koike and H. Shiga, Isogeny formulas for the Picard modular form and a three terms arithmetic geometric mean, *J. Number Theory*, **124** (2007), 123–141.
5) K. Koike and H. Shiga, Extended Gauss AGM and corresponding Picard modular forms, *J. Number Theory*, **128** (2008), 2097–2126.
6) K. Matsumoto and T. Terasoma, Thomae type formula for *K3* surfaces given by double covers of the projective plane branching along six lines *preprint*, 2010.
7) K. Matsumoto, A transformation formula for Appell's hypergeometric function F_1 and common limits of triple sequences, to appear in *Tohoku Math. J.*
8) 難波誠,「算術幾何平均—知っているようで知らない証明に再挑戦」, 数学セミナー, **519**, 2004 年 12 月号, 31–35.
9) 志賀弘典,「算術幾何平均の地平線—不等式の世界」, 数学セミナー, **569**, 2009 年 2 月号, 34–38.
10) 高木貞治,『近世数学史談・数学雑談（復刻版）』, 共立出版, 1996.
11) 梅村浩,『楕円関数論—楕円曲線の解析学』, 東京大学出版会, 2000.

（まつもと・けいじ，北海道大学大学院理学研究院）

特異点と方程式

exponents の shift の観点から



佐竹　郁夫

1. イントロ

高校時代，$f(x)=\sqrt{x}$ や $f(x)=\log x$ といった関数は，$x>0$ の場合のみ考える，と教えられた．しかし，大学に入って読んだ函数論の本には，これらは原点を除いた複素平面上の**多価**な函数として記述されており，それらに対するリーマン面についても書かれていた．多価函数というものは，考えにくいものではあるけれど，とても魅力的なものに思えたことを覚えている．函数論の延長として読んだ保型形式の入門書には，意外な量が次々と現れる級数展開や様々な非自明な関係式が書いてあったが，その背後には多価函数（楕円積分）があることを知り，美しく魅力的なジャングルのように感じたことも思い出される．

しかし，多価函数を考えれば，いつでもこんな面白いことがあるわけではない．その背後には，これらを生み出す「種」のようなものがあるのだろう．そう漠然と思っていたときに，特異点の幾何を背景にした**多価写像（周期写像）**と**保型形式**を作る研究があると知り，その方面を専門とし，現在に至っている．

そのような経緯もあって，本稿では**特異点**から得られる**多価写像の満たす方程式**について述べる．これは特異点の研究全体から見れば，極めて特殊な話題であることは承知しているが，一方でここに現れる構造（**原始形式，フロベニウス構造**）は，**ミラー対称性**の研究の進展につれて，特異点以外の分野にも現れる普遍的な構造であると認識されはじめている．

なお，フロベニウス構造については，周期写像より，むしろ振動積分の観点[2] から見るのが見やすいが，ここで話題にする **exponents** の重要性をモノドロミーとの関係から理解するためもあって，振動積分とはフーリエ双対の関係にあり，昔から研究されていて様々な研究動機を与えた周期積分の話を中心に述べることとする．

2. 積分で定義される多価函数

(2.1) 周期積分（その **1**）

以下で，定積分

$$\Phi_i(g_2,g_3)=\int_{\gamma_i}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}} \qquad (1)$$

$(i=1,2)$ を考えよう．ただしパラメータ $g_2,g_3\in\mathbf{C}$ は $\Delta=g_3^2-\frac{1}{27}g_2^3$（3次方程式 $4x^3-g_2x-g_3=0$ の判別式）$\neq 0$ とする．γ_i は，x 平面 $(x\in\mathbf{C})$ の分岐二重被覆 $y^2=4x^3-g_2x-g_3$ 上の 1-cycles の基底であって，交点数が $\gamma_1\cdot\gamma_2=1$ となるようにとる．

この定積分（周期積分と呼ばれる）を g_2,g_3 の函数と見ると，これは次節で見るようにモノドロミー群が $SL_2(\mathbf{Z})$ となる多価写像であって，良い振舞いをすることが知られている．

(2.2) 周期積分（その **2**）

次の定積分

$$\Psi_i(g_2, g_3) = \int_{\tilde{\gamma}_i} \frac{dx \wedge dz}{\sqrt{(4x^3 - g_2 x - g_3) - z^2}} \quad (2)$$

$(i = 1, 2)$ を考える．但し，(g_2, g_3) の動く範囲は，(2.1) と同じとする．$\tilde{\gamma}_i$ は，x-z 平面 $((x, z) \in \mathbf{C}^2)$ の分岐二重被覆 $y^2 + z^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ 上の 2-cycles の基底であって，交点数が $\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2 \cdot \tilde{\gamma}_2 = -2$, $\tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}_2 = 1$ となるようにとる．

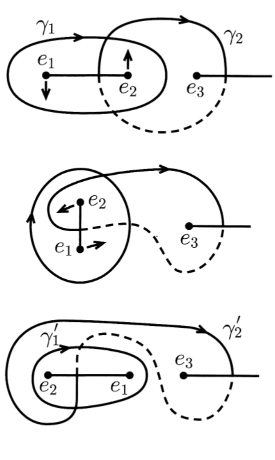
これは後で見るようにモノドロミー群が 3 次対称群となる多価写像であって，良い振舞いをすることが知られている．

3. 多価性をサイクルの変化で見る

(2.2) は (2.1) の定義方程式に z^2 を加えるという最も基本的な操作を施しただけだが，モノドロミー群は大きく異なる．これを観察し，特異点の exponents との関連を述べる．

(3.1) Picard–Lefschetz 公式

積分 $\Phi_i(g_2, g_3)$ の変化を知るためには分岐被覆 $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ 上のサイクル γ_i の変化を調べればよい．$g_2 = 3$ としよう．このとき，多価性は，$g_3 = \pm 1$ の周りに現れる．g_3 を，$g_3 = 0$ から実軸に沿って 1 に近づき，1 の周りを反時計回りに一周して原点まで動かす．このとき，二重分岐被覆の分岐点 e_1, e_2, e_3 のうちの 2 点 e_1, e_2 が入れ替わるのでサイクル γ_1, γ_2 はサイクル γ'_1, γ'_2 へと次のように変化する：



こうして，サイクルの変化は，$\gamma'_1 = \gamma_1$, $\gamma'_2 = \gamma_1 + \gamma_2$ となる．これを行列で表すと次のようになる．

$$(\gamma'_2, \gamma'_1) = (\gamma_2, \gamma_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

これは一般に交点数を用いて 1 次元の場合の Picard–Lefschetz 公式からも求められる．同様に $g_3 = -1$ を一周するときのサイクルの変化は，

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

で表され，(3), (4) の行列から $SL_2(\mathbf{Z})$ が生成される．

同様に，(2.2) の場合，2 次元の場合の Picard–Lefschetz 公式から，局所モノドロミー行列は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

であって，この 2 つの行列から 3 次対称群が生成される．

(3.2) 原点におけるモノドロミー

$g_2 = 0$ として，g_3 を原点の周りで一周させたときのモノドロミーを求めたい．これは，g_2 を $3 \to 0$ に変化させたとき g_3 平面上の 2 つの特異ファイバーが合流すると考えれば，モノドロミーの計算は，上記で求めた 2 つの行列の積で与えられる．

(2.1) の場合の行列の積の固有値は，$\exp(2\pi\sqrt{-1}(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}))$, $\exp(2\pi\sqrt{-1}(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}))$, と書くことができる．ここで現れた

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}, \ \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \qquad (6)$$

を，（$g_2 = g_3 = 0$ と考えた）特異点 $-4x^3 + y^2$ の exponents と呼ぶことにする．

(2.2) の場合にも同様に計算すると，行列の積の固有値は $\exp(2\pi\sqrt{-1}(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}))$, $\exp(2\pi\sqrt{-1}(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}))$, と書くことができる．ここで現れた

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \ \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \qquad (7)$$

を，特異点 $-4x^3 + y^2 + z^2$ の exponents と呼ぶことにする．

(2.2) の場合に現れる行列の積は，A_2 型ルート系の鏡映の積（Coxeter 変換）と理解できる．

(3.3) コホモロジーで見ると

(3.2) で求めたモノドロミーをコホモロジーで計算するには，微分形式 $\frac{dx}{y}$，$\frac{xdx}{y}$ へのモノドロミーの作用を計算すればよい．そのため，x, y, g_2, g_3 への $\alpha \in \mathbf{C}^*$ の作用を

$$(\alpha^{\frac{1}{3}}x, \alpha^{\frac{1}{2}}y, \alpha^{\frac{2}{3}}g_2, \alpha g_3) \tag{8}$$

で定義すると，$\frac{dx}{y}$，$\frac{xdx}{y}$ への $\mathbf{C}^*$ の作用は，

$$\alpha^{-\frac{1}{6}}\frac{dx}{y},\ \alpha^{\frac{1}{6}}\frac{xdx}{y} \tag{9}$$

となり，これを $\alpha = \exp(2\pi\sqrt{-1}t)$ $(0 \le t \le 1)$ に制限することでモノドロミーが計算できる．

考えている二重被覆の方程式に z^2 を加えることで exponents が $\frac{1}{2}$ だけ shift していることは，この観点から見るとわかりやすい（ちなみにこれは，Tate twist と考えられる）．

4. 多価性を方程式で見る

多価函数 $f(z) = z^\alpha$ や $g(z) = \log z$ は，微分方程式 $(z\frac{d}{dz} - \alpha)f = 0$ や $z\frac{d}{dz}g = 1$ を満たす．この方程式に函数の多価性の情報が入っていると考えられる．そこで，(2.1) と (2.2) の周期積分の満たす微分方程式を導出しよう．

(2.1) の積分は，被積分函数を g_2, g_3 で微分することで，（x の函数の x での外微分の積分が 0 であることに注意すると）次の微分方程式を満たすことがわかる：

$$\begin{pmatrix} dI_1 \\ dI_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -\omega_1 & \omega_2 \\ \dfrac{-g_2\omega_2}{12} & \omega_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

ここで，$\Delta = g_3^2 - \frac{1}{27}g_2^3$，$\omega_1 = d\Delta/(2\Delta)$，$\omega_2 = (g_3dg_2 - \frac{2}{3}g_2dg_3)/\Delta$，$I_1$，$I_2$ は任意に固定したサイクル γ についての次の積分 $I_1 := \int_\gamma \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$, $I_2 := \int_\gamma \frac{xdx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$ である．

(2.2) の積分も，同様に次の微分方程式を満たすことがわかる：

$$\begin{pmatrix} d\tilde{I}_1 \\ d\tilde{I}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \omega_1 & 2\omega_2 \\ \frac{g_2\omega_2}{12} & 2\omega_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

ただし，$\tilde{I}_1$，$\tilde{I}_2$ は任意に固定したサイクル $\tilde{\gamma}$ についての次の積分 $\tilde{I}_1 := \int_{\tilde{\gamma}} \frac{dxdz}{\sqrt{(4x^3-g_2x-g_3)-z^2}}$, $\tilde{I}_2 := \int_{\tilde{\gamma}} \frac{xdx}{\sqrt{(4x^3-g_2x-g_3)-z^2}}$ である．

5. 方程式に現れている構造

微分方程式 (10), (11) に共通に現れる微分形式 ω_1, ω_2 を説明するため，特異点理論の枠組みで今までの状況を書き直す．

$(g_2, g_3) \in \mathbf{C}^2 = M$ とし，関数 $F : \mathbf{C}^2 \times M \to \mathbf{C}$，$((x,y)(g_2,g_3)) \mapsto w = y^2 - (4x^3 - g_2x - g_3)$ を用いて写像 $\varphi : \mathbf{C}^2 \times M \to \mathbf{C} \times M$ を $F \times id.$ で定義する．φ のファイバーの 1-cycle で $\frac{dx}{y}$ を積分することにより，周期積分が $\mathbf{C} \times M$ 上の（多価）函数として定義できる．これを M 上に制限したものが 4 節までに考えていた周期積分である．

φ の **critical set** を C とする．$\partial_3 = \frac{\partial}{\partial g_3}$，$\partial_2 = \frac{\partial}{\partial g_2}$ と略記する．$\partial_i \mapsto \partial_i F|_C$ により M のベクトル場と C 上の関数に一対一の対応がつく．$\partial_3 \leftrightarrow 1, \partial_2 \leftrightarrow x$ である．これにより，M のベクトル場の全体に**積** $\circ$ が定まる．例えば，$\partial_2 \circ \partial_2$ は，C 上で $x \times x$ だが，C 上では $\frac{\partial F}{\partial x} = -12x^2 + g_2 = 0$ なので $x^2 = \frac{g_2}{12}$．よって，$\partial_2 \circ \partial_2 = \frac{g_2}{12}\partial_3$ となる．積を行列の形で書くと，

$$\partial_3 \circ \begin{pmatrix} \partial_3 \\ \partial_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_3 \\ \partial_2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\partial_2 \circ \begin{pmatrix} \partial_3 \\ \partial_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g_2}{12} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_3 \\ \partial_2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

となる．また，**オイラーベクトル場** $E = g_3\partial_3 + \frac{2}{3}g_2\partial_2$ が存在し，特異点が $\mathbf{C}^*$ 作用を持つことに対応しているが，これに対しては

$$E \circ \begin{pmatrix} \partial_3 \\ \partial_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_3 & \dfrac{2}{3}g_2 \\ \dfrac{1}{18}g_2^2 & g_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_3 \\ \partial_2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

となることがわかる．

$X_1 := E \circ \partial_3 (= E)$, $X_2 := E \circ \partial_2$ とすると，(10), (11) で現れた ω_1, ω_2 は，

$$\langle X_i, \omega_j \rangle = \delta_{ij} \tag{15}$$

の関係にあることがわかる．

ω_1, ω_2 は，$\mathbf{C}$ 上の $\frac{dz}{z}$ の一般化であり，そのため logarithmic 1-form と呼ばれる．

$\{\Delta = 0\}$ は特異性が高く，$M \setminus \{\Delta = 0\}$ の基本群は複雑（だからこそモノドロミー群が豊か！）だが，それを反映する logarithmic 1-form の空間は案外よい性質を持つ．これは特異点を一般化しても同様であり，こうして現れる基本群が「良い」ことを示唆していると思われる．

6.「周期 ⟶ 方程式」から「方程式 ⟶ 周期」へ

周期積分（単に周期とも呼ぶ）の満たす微分方程式を解析し (6.1–6.4)，逆に微分方程式から「よい周期積分」を決めていく (6.5).

(6.1) exponents の寄与する部分を分離する

4 節の微分方程式に現れた行列の差は，

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \dfrac{g_2\omega_2}{12} & \omega_1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

となり，この行列の 2 倍を Ω と置く．また，exponents から 1 を引いたものを並べた行列を

$$E_1 := \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{6} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad E_2 := \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{17}$$

とすると，4 節の方程式はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} dI_1 \\ dI_2 \end{pmatrix} = \Omega E_1 \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$\begin{pmatrix} d\tilde{I}_1 \\ d\tilde{I}_2 \end{pmatrix} = \Omega E_2 \begin{pmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

となり，exponents の寄与する部分を分離できた．(2.1) と (2.2) の違いは方程式では exponents のずれだけであることがわかる．

(6.2) 常微分方程式の変形

以下で，周期積分を 5 節で述べたように $\mathbf{C} \times M$ 上で考える（扱う対象を，周期から $\mathbf{C}$ 上の周期の族に変える）．その微分方程式を求めるには，φ が一方向に自明であることから，

$$p : \mathbf{C} \times M \to M, \ (w, g_2, g_3) \mapsto (g_2, g_3 - w) \tag{20}$$

で (18) を引き戻せばよい．準備として，

$$A := \begin{pmatrix} g_3 & \dfrac{2}{3}g_2 \\ \dfrac{1}{18}g_2^2 & g_3 \end{pmatrix}, \ D := \begin{pmatrix} dg_3 & dg_2 \\ \dfrac{g_2 dg_2}{12} & dg_3 \end{pmatrix} \tag{21}$$

と置くと，$A\Omega = D$ が確かめられる．よって (18) に左から A を掛けて次の形にする．

$$A\begin{pmatrix} dI_1 \\ dI_2 \end{pmatrix} = DE_1 \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

全微分方程式 (22) を，(20) で引き戻そう．

$$A^* := \begin{pmatrix} g_3 - w & \dfrac{2}{3}g_2 \\ \dfrac{1}{18}g_2^2 & g_3 - w \end{pmatrix} \tag{23}$$

とおくと，引き戻された方程式の dw, dg_3, dg_2 の係数は，$\hat{I}_i := p^* I_i \, (i = 1, 2)$ とすると

$$A^* \begin{pmatrix} \partial_w \hat{I}_1 \\ \partial_w \hat{I}_2 \end{pmatrix} = -E_1 \begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$A^* \begin{pmatrix} \partial_3 \hat{I}_1 \\ \partial_3 \hat{I}_2 \end{pmatrix} = P_3 E_1 \begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

$$A^* \begin{pmatrix} \partial_2 \hat{I}_1 \\ \partial_2 \hat{I}_2 \end{pmatrix} = P_2 E_1 \begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{pmatrix} \tag{26}$$

である．ただし，P_3, P_2 は，(12), (13) に現れた積構造の行列

$$P_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ P_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g_2}{12} & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

である．(24)–(26) を現れる行列の可換性（critical set の関数環は可換）に注意して整理すると，

$$\begin{pmatrix} \partial_3 \hat{I}_1 \\ \partial_3 \hat{I}_2 \end{pmatrix} = -P_3 \begin{pmatrix} \partial_w \hat{I}_1 \\ \partial_w \hat{I}_2 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$\begin{pmatrix} \partial_2 \hat{I}_1 \\ \partial_2 \hat{I}_2 \end{pmatrix} = -P_2 \begin{pmatrix} \partial_w \hat{I}_1 \\ \partial_w \hat{I}_2 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$w \begin{pmatrix} \partial_w \hat{I}_1 \\ \partial_w \hat{I}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \partial_w \hat{I}_1 \\ \partial_w \hat{I}_2 \end{pmatrix} + E_1 \begin{pmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{pmatrix} \tag{30}$$

となる．我々は (30) の常微分方程式を，exponents を不変量に持つ幾何的対象と考え，それが exponents の shift によらない変形方程式 (28), (29) で変形されていると見る．

(6.3) $\hat{I}_1$ で書く

(28)–(30) に ∂_w^j $(j \geq 0)$ を作用させて

$$\begin{pmatrix} \partial_3 \partial_w^j \hat{I}_1 \\ \partial_3 \partial_w^j \hat{I}_2 \end{pmatrix} = -P_3 \begin{pmatrix} \partial_w^{j+1} \hat{I}_1 \\ \partial_w^{j+1} \hat{I}_2 \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$\begin{pmatrix} \partial_2 \partial_w^j \hat{I}_1 \\ \partial_2 \partial_w^j \hat{I}_2 \end{pmatrix} = -P_2 \begin{pmatrix} \partial_w^{j+1} \hat{I}_1 \\ \partial_w^{j+1} \hat{I}_2 \end{pmatrix} \tag{32}$$

$$w \begin{pmatrix} \partial_w^{j+1} \hat{I}_1 \\ \partial_w^{j+1} \hat{I}_2 \end{pmatrix}$$

$$= A \begin{pmatrix} \partial_w^{j+1} \hat{I}_1 \\ \partial_w^{j+1} \hat{I}_2 \end{pmatrix} + (E_1 - jE) \begin{pmatrix} \partial_w^j \hat{I}_1 \\ \partial_w^j \hat{I}_2 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

但し, E は単位行列である．(33) を用いると, $j < 0$ に対しても $\partial_w^j \hat{I}_1$, $\partial_w^j \hat{I}_2$ が帰納的に定義できる．そしてそれらは (31), (32) 式を満たす．∂_w^j を用いることにより exponents を shift した方程式の解が得られていることに注意する．

$\hat{I}_1$ についての単独方程式を得るためには, $\hat{I}_2$ を $\hat{I}_1$ の微分で書く必要がある．(31), (32) より

$$\hat{I}_2 = -\partial_2 \partial_w^{-1} \hat{I}_1 \, (\text{同様に} \hat{I}_1 = -\partial_3 \partial_w^{-1} \hat{I}_1) \tag{34}$$

と書くことができる．

また，(2.1), (2.2) と同様にして，もっと次元の高い $y^2 + z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{2k}^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ について周期積分を考えると，その満たす方程式は，(18) の方程式において exponents を k 増やしたものになることがわかる．これを (33) と比べると，次の対応が浮かび上がる：

$$\int \frac{dx dz_1 dz_2 \cdots dz_{2k}}{y} \leftrightarrow \partial_w^{-k} \int \frac{dx}{y}, \tag{35}$$

$$\int \frac{x dx dz_1 dz_2 \cdots dz_{2k}}{y} \leftrightarrow \partial_w^{-k} \int \frac{x dx}{y}. \tag{36}$$

これらの理由から，われわれは，

$$\{\mathbf{C}[g_2, g_3] \partial_i \partial_w^j \hat{I}_1 \,|\, (i = 3, 2, \ j \in \mathbf{Z}_{<0})\} \tag{37}$$

を用いて微分関係式を考えることにする．すると，(31)–(33), (34) および P_3, P_2 の意味から

$$\partial_i \partial_j \partial_w^{-2} \hat{I}_1 = (\partial_i \circ \partial_j)(-\partial_w^{-1} \hat{I}_1), \tag{38}$$

$$w \partial_i \partial_w^{-1} \hat{I}_1 = (E \circ \partial_i) \partial_w^{-1} \hat{I}_1 + N(\partial_i) \partial_w^{-2} \hat{I}_1 \tag{39}$$

が得られる．ただし，N は，∂_3, ∂_2 をそれぞれ exponents 倍する線形写像とする．

(6.4) I_1 の満たす微分方程式

以上から，M 上の函数としての I_1 の（従って (1) の Φ_i の）満たす微分方程式

$$(\partial_i \partial_j - (\partial_i \circ \partial_j) \partial_3) I_1 = 0, \tag{40}$$

$$((E \circ \partial_i) \partial_3 - (N - 2) \partial_i) I_1 = 0 \tag{41}$$

$(i, j = 3, 2)$ が得られる．

(6.5) 方程式から周期へ

上で得られた方程式の性質（(38), (39) の右辺に $\partial_i \partial_w^j \hat{I}_1$ $(j \leq -3)$ が現れない）を，積分される微分形式 $\frac{dx}{y}$ が満たしている条件（方程式）と考えることができる．

そこで一般の特異点の場合に, この条件を積分される微分形式 ζ に対して課してみよう．変形空間 M のパラメータを $t_1, \cdots, t_\mu$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$, ∂_1 は小平スペンサー写像から定まる積の単元とする．ζ を Brieskorn lattice の元として考え, Gauss–Manin 接続の作用を用いてできる

$$\{\partial_i \partial_w^j \zeta \,|\, i = 1, \cdots, \mu, \ j \in \mathbf{Z}_{<0}\} \tag{42}$$

が，Brieskorn lattice の $\mathbf{C}[t_1, \cdots, t_\mu]$ 上の基底となることと，$\partial_i \partial_j \partial_w^{-2} \zeta$ と $w \partial_j \partial_w^{-1} \zeta$ をこの基底で表したときに，(38), (39) のように $\partial_i \partial_w^j \zeta$ $(j \leq -3)$ が現れないことを ζ の条件として課す（この条件は $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ を用いても表される）．

するとこの条件から，一意的に M 上の torsion free な可積分接続 ∇ と ∇ について平坦な

$N:\Theta_M\to\Theta_M$: $\mathcal{O}_M$-準同型が存在して，

$$\partial_i\partial_j\partial_w^{-2}\zeta=(\partial_i\circ\partial_j)(-\partial_w^{-1}\zeta)+(\nabla_{\partial_i}\partial_j)\partial_w^{-2}\zeta,$$
$$w\partial_i\partial_w^{-1}\zeta=(E\circ\partial_i)\partial_w^{-1}\zeta+N(\partial_i)\partial_w^{-2}\zeta$$

となることがわかる．

そこで，このような ζ を1つ固定する．ζ から定まる ∇ と N を用いて，$t_1,\cdots,t_\mu$ 上の未知函数 f に対する方程式

$$(\partial_i\partial_j-(\partial_i\circ\partial_j)\partial_1-\nabla_{\partial_i}\partial_j)f=0,\quad(43)$$
$$((E\circ\partial_i)\partial_1-(N-2)\partial_i)f=0\quad(44)$$

を考え，その解として周期を定義する．

7. サイクルをつかまえる

しかし，これはかなり乱暴な話であって，実際は N の固有値が特異点に対して定義された exponents に一致するという条件も課して ζ を選ぶべきである．また（モノドロミー被覆上）周期写像の単射性を期待するなら，exponents の shift をする必要が生じる（例えば $\mathbf{C}^*$ 上の関数 $f(z)=z^{3/2}$ は，exponents を shift して $g(z)=z^{1/2}$ にすべきである）．また，サイクルの積分として得られる周期は，単なる函数ではなくサイクルの交点数の構造を考えるべきであるが，これを上記では考慮していない．

実は，(2.1) の例で言えば，$g=(g_2,g_3)$ を固定したときに，$\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}$, $(x,y)\mapsto w=F_g=y^2-(4x^3-g_2x-g_3)$ に対して**留数対**

$$J(\phi dxdy,\psi dxdy)=\mathrm{Res}_{\mathbf{C}^2/\mathbf{C}}\begin{bmatrix}\phi\psi dxdy\\ \dfrac{\partial F_g}{\partial x},\dfrac{\partial F_g}{\partial y}\end{bmatrix}\quad(45)$$

が定義できる．

また，exponents の shift の観点からは，$\mathbf{C}^{2k+2}\to\mathbf{C}$, $(x,y,z_1,\cdots,z_{2k})\mapsto w=\tilde{F}_g=y^2+z_1^2+\cdots+z_{2k}^2-(4x^3-g_2x-g_3)$ に対する留数対を対応 (35), (36) で考えると，(2.1) の枠組みの中に，通常の留数対を超えた対が存在することがわかる．これを組織的に構成したのが**高次留数対**であるとみることができる．

さて，留数対を用いて M 上の計量が

$$g(\partial_k,\partial_l):=J\left(\partial_k\partial_w^{-1}\frac{dx}{y}\wedge dF_g,\partial_l\partial_w^{-1}\frac{dx}{y}\wedge dF_g\right)\quad(46)$$

として定義できる．この場合には，∇ について平坦な計量である．

一般の特異点の場合に6節の条件を満たす ζ をとって同様に計量を定義したとき，その計量が ∇ に関して平坦であるためには ζ にさらに条件を課す必要があって，その条件は高次留数対を用いて書ける．ζ に対する 6, 7 節で述べた条件は斎藤恭司氏によって発見され，この条件を満たす ζ は，**原始形式**と名づけられた．この原始形式を用いることで，サイクルの交点数を理論に取り込むことができる．

8. フロベニウス多様体と WDVV 方程式

上記で現れた $(M,e,E,\circ,g)$（e は積 $\circ$ の単位元）は，よい両立条件（可積分条件）を満たしている．一般にそのような両立条件をみたすものは，**フロベニウス多様体**と呼ばれている．

フロベニウス多様体の**ポテンシャル** F を定義しておこう．平坦なベクトル場の局所基底 $X_1,\cdots,X_\mu$ に対して，η_{ij} を $g(X_i,X_j)=:\eta_{ij}$，とし，η^{ij} を $\eta_{ij}\eta^{jk}=\delta_i^k$（$\sum$ は省略）とする．

式 $X_i\circ X_j=C_{ij}^kX_k$ で定義される積の構造定数 C_{ij}^k は，フロベニウス多様体の可積分条件から，つぎのような母関数 F を持つ：

$$X_iX_jX_kF=g(X_i\circ X_j,X_k).\quad(47)$$

積 $\circ$ は，結合的であったから，これを F の満たす方程式として書くと

$$\frac{\partial^3F}{\partial_i\partial_j\partial_p}\eta^{pq}\frac{\partial^3F}{\partial_k\partial_l\partial_q}=\frac{\partial^3F}{\partial_k\partial_j\partial_p}\eta^{pq}\frac{\partial^3F}{\partial_j\partial_l\partial_q}\quad(48)$$

となる．これを **WDVV**（Witten–Dijkgraaf–

Verlinde–Verlinde）**方程式**と呼ぶ．これは強い条件であって，条件を課すと（積構造を忘れても）WDVV 方程式から F を復元できることがある．

9. 保型形式へ

周期写像の逆写像を考えることができる場合に，上記のフロベニウス多様体の可積分構造は，逆写像を記述する保型形式の満たす微分方程式系となる．単純楕円型特異点の場合，この構造を用いて，筆者により具体的な逆写像の記述が得られた．得られた保型形式へのミラー対称性からのアプローチや，保型形式の立場からのフロベニウス構造の研究（原始形式の族について一斉にフロベニウス構造を扱う方法としての共形フロベニウス構造）が進展することを楽しみにしている．

参考文献

1) B. Dubrovin. *Geometry of 2D topological field theories.* In: Springer LNM, 1620 (1996), 120–348.
2) A. Givental. *Homological geometry and mirror symmetry.* In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zürich, 1994, Birkhäuser, 1995, v.1, pp.472–480.
3) K. Saito and A. Takahashi. From Primitive Forms to Frobenius Manifolds, RIMS preprint-**1623** March, 2008.

（さたけ・いくお，大阪大学大学院理学研究科）

名著に親しむ

——特集から広がる読書案内——

太田 啓史

徒然なるままに

すでに巻頭文でも述べたが,「現代幾何と方程式」というテーマはあまりに漠としている.ここでは,今回の特集に関係する本に限って何冊か思いつくままに紹介したい.

古今を問わず,幾何学に現れる方程式の大きな源泉の一つは物理であろう.ハミルトン力学など古典解析力学に関しては,V.I. アーノルドの『古典力学の数学的方法』(安藤・蟹江・丹羽訳,岩波書店)が定番の名著である.旧ソビエトでは,この本の内容は数学科でも常識として教えられていたそうである.筆者は,学生時代に存在は知っていたが実際に読んでみたのはだいぶ後になってからである(何せ学生にとってはかなり高い本であったし一時期なかなか手に入らなかったと思う).解析力学を幾何学的視点から学ぶにはたいへんよい本である.また,C.L. Siegel and J.K. Moser, "Lectures on Celestial Mechanics," Springer も古典的名著として名高い.今号に寄稿頂いた伊藤秀一さんは若いとき(失礼)かなり読み込まれたと聞く.

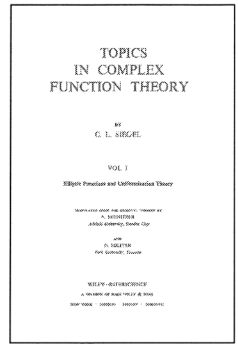
シンプレクティック幾何は解析力学から生まれた幾何学である.H. Hofer and E. Zehnder, "Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics," Birkhäuser は,ハミルトン力学から説き起こしそれを元来の確固たる問題意識の源泉として現代シンプレクティック幾何学のある程度のところまでを解説する.幾何学の一分野としてのシンプレクティック幾何学というチャラチャラした昨今の雰囲気よりは,古典的問題意識に根付いた本として味わいがあると思う.

電磁気学から発展したゲージ理論特に Yang-Mills 理論が物理の理論として世に出たのは 1950 年代であるが,一方数学の世界ではファイバー束,その上の接続の幾何学として物理のゲージ理論とは独立に研究されていた.電磁気学の基礎方程式は Maxwell の方程式という(偏)微分方程式であるが,これは,幾何学的にはある複素直線束上の接続の曲率に関する Bianchi の恒等式とある随伴微分に関する方程式と解釈される.お互いの概念の相互翻訳などは行なわれていたようであるが,その後,1970 年代頃には M.F. Atiyah(元々 H. Weyl などの影響もあったと思われるが)などにより直接物理のゲージ理論の考え方に踏み込んで数学的にも興味深い研究対象として認識されてきたと思われる.そんな流れの中で,数学の世界に大きな衝撃を与えたのは S.K. Donaldson, "An application of gauge theory to four dimensional topology" (J. Diff. Geom (1983) 279–315) であろう.An application といっているところが何ともイギリス紳士的で健気な感じがするが,その後この方向で数学(特に幾何学)が大きく発展した.S.K. Donaldson and P.B. Kronheimer, "The Geometry of Four-Manifolds," Oxford Press. は 1990 年代初頭に出版された本で,接続に関する微分幾何学的な内容だけでなく,非線形偏微分方程式の解析,代数曲面やベクトル束に関する代数幾何的な話などゲージ理論にまつわる広範で横断的な数学を実に有機的に記述している.背景に横たわる考え方も随所に語られており,技術を習得するだけでなく深い味わいを感じることができる本で,私の好きな数学の本の一つである.

弦理論からの影響などもあり,シンプレクティック幾何とゲージ理論が思わぬところで関係してくることがある.ミラー対称性予想に関連することはその一例である.基本的な考え方は,ものごとを特異なところへもっていくと,何らかの対応関係が明示的に見えるということである.この考え方自体,例えば保型形式を特異点の周りで展開してみるなど,数学の世界ではある程度古典的かつ普遍的なものかもしれない.特異点にまつわる数学は,一方にそのような考え方から時代を超えてしばしば一見異なる数学を結びつける素材を提供しているように思える.また一方で,具体的な現象の記述例として特異点の研究は豊かな素材を提供している.J. Milnor, "Singular points of complex hypersurfaces," Princeton U.P.(日本語訳あり.『複素超曲面の特異点』(佐伯・佐久間訳,シュプリンガー・ジャパン))は特異点に関するよい古典であり入門書である.実際,いくつかの数学が特異点を舞台に交錯していく様が見てとれると思う.いくつかのテーマについては,さらに現代的かつ専門的な本もあるのでそのような本に進むよい動機付けにもなると思う.

(おおた・ひろし,名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

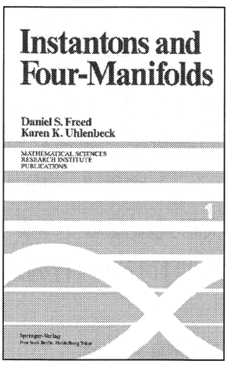
TOPICS IN COMPLEX FUNCTION THEORY



C.L. Siegel 著，196 頁，vol 1–**3**, John Wiley and Sons Inc.

大学２年生くらいで複素関数論の初歩を学ぶことが多い．留数定理に感銘を受けても積分計算ばかりしているだけではどうも，という方は是非手にとって頂きたい．全３巻．楕円関数，一意化定理，保型関数の幾何学的な入門（双曲幾何のよい入門にもなる）やアーベル積分，リーマン・ロッホの定理など複素解析的なリーマン面の入門書としても読める．味わいある古典．難はなかなか手に入らないこと．私は２年生のとき，大学の（数学科のではない）図書館で何度か継続して借りて注意された（数学の本は２週間程度で読めるものでもなかろうに）．未だに全巻は持っていない．

Instantons and Four-Manifolds

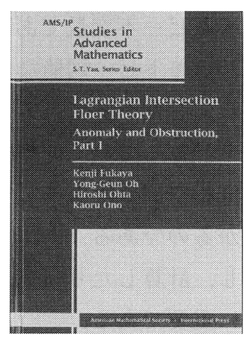


D. Freed and K. Uhlenbeck 著，232 頁，M.S.R.I. Publications vol **1**, Springer

ゲージ理論を４次元トポロジーに初めて応用しかつ世界をあっと言わせた結果を出したS.K. Donaldson の実質的デビュー論文（左頁参照）を読み解くために，1980年代初頭にバークレイの研究所で行われたセミナーをもとにした本．Uhlenbeck が中心となって非線形偏微分方程式に関する解析的な議論も詳しく解説している．基本的な技術を学ぶには未だによい本だと思う．当時トポロジーの研究者の中にはソボレフ空間と聞くと胃がグッと重くなる人がいたとかいないとか．

Lagrangian Intersection Floer Theory

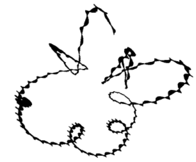
Anomaly and Obstruction



K. Fukaya, Y-G. Oh, H. Ohta and K. Ono 著，805 頁，Studies in Advanced Mathematics, vol **46-1**, **46-2**, American Mathematical Society/International Press

手前味噌で甚だ恐縮であるが，1996 年から始まって苦節十余年，昨年ようやく出版された本．２巻本．教科書というより研究論文．シンプレクティック幾何でラグランジアン部分多様体に対する Floer 理論の障害・変形理論を A_∞ 代数という一種のホモトピー代数構造を基礎にして展開したもの．ミラー対称性予想の片方である通称深谷圏を構成するのに基礎となる理論．執筆当初はこんなに時間も分量もかかるとは思っておらず，ある技術的理由により当時ポピュラーだった AMS-TeX というワープロソフトで書き始めた結果，式番号，定理番号（Proposition 7.2.366 など）をすべて手で打ち込むという超人的に愚かな苦労をした本．活字が小さいという話もあるが，これは出版社の意向によるもので，特に老眼の人には意図して読みにくくしているわけではない．実際，筆者たち自身も読んでいると目の奥が痛くなる年頃になってきている．多分に校正段階での目の酷使が祟っていると個人的には思っている．

ゲージ理論の方程式と低次元トポロジー



笹平 裕史

1. はじめに

トポロジーにおいて主要なテーマの一つは，位相空間を何らかの意味で同じかどうか判別したり分類したりすることである．“何らかの意味で” とは，ホモトピー同値か，同相か，可微分多様体であれば微分同相であるか，といったことである．この問題に有効な手立ては，“**不変量**” を計算して異なるかどうかを見ることである．例えば位相空間に対してホモロジー群が定義されるが，これはホモトピー不変量である．つまり，2 つの位相空間がホモトピー同値ならばホモロジー群は同型になる．したがって，2 つの位相空間のホモロジー群を計算してみて同型でないと分かれば，それらの位相空間はホモトピー同値でないということが分かるのである．トポロジーにおいて不変量を構成し，計算したり研究したりするということは非常に重要である．

4 次元多様体のトポロジーで非常に重要な交叉形式と呼ばれる**位相不変量**がある．X を向きの付いた閉位相多様体とする．X の**交叉形式**とは，2 次元ホモロジー（を Torsion からなる部分群で割ったもの）の上の 2 次形式

$$Q_X : H_2(X;\mathbb{Z})/Tor \otimes H_2(X;\mathbb{Z})/Tor \to \mathbb{Z}$$

のことである．$\alpha_1, \alpha_2 \in H_2(X;\mathbb{Z})$ のとき，$Q_X(\alpha_1,\alpha_2)$ は $\langle PD(\alpha_1) \cup PD(\alpha_2), [X]\rangle$ と定義される．PD は Poincare 双対で，$[X] \in H_4(X;\mathbb{Z})$ は X の基本類，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $H^4(X;\mathbb{Z})$ と $H_4(X;\mathbb{Z})$ の間の自然な paring である．言い換えると，それぞれのホモロジー類を代表する X の中の 2 つの曲面 S, S' の交わりの点の個数を，適当に符号を付けて数えた値が $Q_X(\alpha_1,\alpha_2)$ である（図 1）．Q_X はユニモジュラーな 2 次形式になる（つまり，基底を選んだときに対応する対称行列の行列式が ± 1 である）．

交叉形式に関する基本的な問題として，

1. 任意にユニモジュラーな 2 次形式が与えられたとき，その 2 次形式を交叉形式として持つ 4 次元多様体 X が存在するか？
2. 交叉形式 Q_X は 4 次元多様体を判別するのにどのくらい強力な不変量なのか？

が挙げられる．これらの問題は，位相多様体の範疇で考えることも，可微分多様体の範疇で考えることもできる．Freedman や Donaldson の 1980

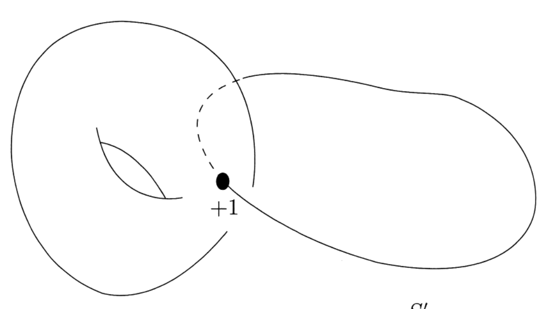


図 1 交叉形式.

年代における研究によって，それぞれの範疇で様相が大きく異なることが明らかになった．Freedmanによると，任意のユニモジュラーな2次形式が与えられると，それを交叉形式として持つ単連結4次元位相多様体が，同相を除いて，ちょうど2つ存在する．位相多様体の範疇では，問の1は肯定的に解かれたわけである．また，単連結な4次元位相多様体の不変量として，Q_X は非常に強い不変量といっていいだろう．一方，Donaldsonは可微分多様体の範疇で，これとは異なる結果を証明した．Donaldsonは4次元可微分多様体の交叉形式として実現できないユニモジュラーな2次形式が多く存在することを示した．また，同相であるが微分同相でない多くの4次元多様体の例を構成した．これは Q_X だけ見ても可微分多様体として判別できない例が豊富にあるということを意味する．Donaldsonの研究は，結果が面白いだけでなく，その手法自体がそれまでにない全く新しいものだった．Donaldsonの理論では，物理のゲージ理論に由来する4次元可微分多様体上の偏微分方程式の解の**モジュライ空間**を利用する．解のモジュライ空間とは，解全体の空間（適当にトポロジーをいれておく）の"ゲージ同値"という同値関係による商空間である．微分方程式をたてるときに X の微分構造を用いているから，モジュライ空間は X の微分構造を反映している．Donaldsonはモジュライ空間の構造をよく見ることで，4次元可微分多様体の交叉形式として実現できない多くのユニモジュラーな2次形式が存在することを証明した．さらに，Donaldsonはモジュライ空間を用いて，4次元多様体の**微分同相不変量**を構成した．その不変量は，それまで知られていた位相不変量とは本質的に異なり，X の可微分構造を反映した不変量になっている．Donaldsonはその不変量を計算することにより，同相であるが微分同相でない4次元多様体の例を構成した．

ゲージ理論によって得られる不変量に関してこれまで多くの研究が積み重ねられ，多くの未解決問題が解決されたり，新しい定理が証明されたりしている．1994年になると，Seiberg–Witten理論が現れ，新しい方程式が導入された．これにより，ゲージ理論のトポロジーへの応用がさらに大きく進展した．本稿では，ゲージ理論における微分方程式のトポロジーへの応用例をいくつか紹介する．ここで紹介できるのは，ゲージ理論の応用のごく一部である．また，証明の詳細を説明することもできないが，ゲージ理論の面白さの一端を感じ取っていただければ幸いである．

2. インスタントン方程式

以後多様体というと可微分多様体を指すことにする．Donaldsonの理論では，**インスタントン方程式**と呼ばれる方程式が用いられる．G をリー群とする．X を向きのついた4次元閉多様体とし，P を X 上の主 G 束とする．また，X のRiemann計量 g をとる．インスタントン方程式を書くには，Hodge $*$-作用素や P の接続とその曲率が必要になる．これらについては微分幾何学の教科書[1,2]を参照していただきたい．

インスタントン方程式は，P 上の接続 A に対する方程式で，

$$F_A^+ = 0$$

と書かれる．F_A は接続 A の曲率で，P の随伴束 $\mathfrak{g}_P = P \times_{\mathrm{ad}} \mathfrak{g}$ に値を持つ X 上の2-形式である（$\mathfrak{g}$ は G のリー環である）．F_A^+ は F_A の自己双対部分を表し，4次元特有のものである．X 上の $\mathfrak{g}_P$ に値を持つ i-形式の空間を $\Omega_X^i(\mathfrak{g}_P)$ と書く．X のRiemann計量から，Hodge $*$-作用素 $* = *_g : \Omega_X^i(\mathfrak{g}_P) \to \Omega_X^{4-i}(\mathfrak{g}_P)$ が定まる．$i = 2$ のときは，$\Omega_X^2(\mathfrak{g}_P)$ の自己準同型で，$*^2 = 1$ となる．よって固有値が ± 1 で，$\Omega_X^2(\mathfrak{g}_P)$ は固有値 $+1$ の固有空間 $\Omega_X^+(\mathfrak{g}_P)$ と -1 の固有空間 $\Omega_X^-(\mathfrak{g}_P)$ の直和に分解できる．F_A^+ は F_A の固有値 $+1$ の成分である．インスタントン方程式は F_A がHodge $*$-作用素の固有値 -1 の固有ベクトルであることを意味している．

$\mathcal{G}$ を X の恒等写像をカバーする P の束写像からなる群とする．これはゲージ群と呼ばれる．接続を引き戻すことによって，ゲージ群はインスタン

トン方程式の解空間に作用する．解空間の $\mathcal{G}$ による商空間を $\mathcal{M}_P^{\text{inst}}$ と書きインスタントンのモジュライ空間と呼ぶ．インスタントン方程式では X の Riemann 計量 g を用いているので，モジュライ空間は g に依存している．g に依存していることを強調するときは，$\mathcal{M}_P^{\text{inst}}(g)$ と書く．応用上重要なのは，$G = SU(2)$ または $SO(3)$ の場合である．本稿では主に $G = SU(2)$ の場合を扱う．X 上の主 $SU(2)$ 束の同型類は $c_2(P) \in H^4(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ で分類できる．$c_2(P) = k$ のとき，$\mathcal{M}_P^{\text{inst}}$ を $\mathcal{M}_k^{\text{inst}}$ とも書く．

3. 交叉形式への応用

インスタントン方程式の4次元トポロジーへの応用は，Donaldson による次の定理が最初である．

定理 1　X を向きのついた単連結 4 次元閉多様体で，交叉形式 Q_X が負定値であるとする．このとき，Q_X は対角化可能である．

X の向きを反対に取ることで，正定値についても同じことが言える．よって，対角化できないすべての定値ユニモジュラー2次形式が，滑らかな多様体の交叉形式として実現できないことが分かる．

定理 1 から驚くべき事実が証明される．定理 1 と Freedman らの Casson ハンドルに関する仕事を合わせると，$\mathbb{R}^4$ のエキゾチック構造が存在すること，つまり $\mathbb{R}^4$ の通常のものとは異なる微分構造が存在することが分かるのである．n が 4 以外のときには，$\mathbb{R}^n$ のエキゾチック構造は存在しない．4 次元というのは非常に特別な次元であることが分かる．

さらに Donaldson は次の定理を証明した．

定理 2　X を単連結スピン 4 次元閉多様体とする．$b^+(X)$ を Q_X の正の固有値の数とする．$b^+(X) = 1$ または 2 のとき，Q_X は H または $H \oplus H$ に同型である．ただし，

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．

定理 2 は松本幸夫氏[5)] による次の有名な予想が，$b^+(X) = 1, 2$ のときに正しいことを意味する．

予想 3（11/8 予想）　X を単連結スピン 4 次元閉多様体とする．このとき，次の不等式が成り立つ．

$$b_2(X) \geq \frac{11}{8}|\text{sign}(X)|.$$

$b_2(X)$ は X の第 2Betti 数である．また，$\text{sign}(X)$ は Q_X の指数，つまり，Q_X の正の固有値の数から負の固有値の数を引いた数である．

これらの定理は，$\mathcal{M}_k^{\text{inst}}$ の特異点やコンパクト化の様子を調べることで証明される（ここでは証明についてこれ以上説明しないことにする）．

4. Donaldson 不変量

ゲージ理論を用いて，Donaldson は $b^+(X) > 1$ なる 4 次元多様体 X の微分同相不変量を構成した．簡単のため，X は単連結であると仮定する（この仮定は外すことができる）．また，この節では特に断わりがない限り，$b^+(X) > 1$ を常に仮定する．P を X 上の主 $SU(2)$ 束とする．$\mathcal{A}^*$ を P 上の既約な接続全体の空間とする．$SU(2)$ 接続が既約とは，2 つの $U(1)$ 接続の直和となっていないことである．$\mathcal{A}^*$ のゲージ群 $\mathcal{G}$ による商 $\mathcal{B}_k^* = \mathcal{A}^*/\mathcal{G}$ は（適当に位相を入れると）無限次元の多様体になる（$k = c_2(P)$ である）．さらに，（必要ならば g を摂動すると）$\mathcal{M}_k^{\text{inst}}$ は $\mathcal{B}_k^*$ の滑らかな有限次元部分多様体となることが，Sard–Smale の定理により分かる．粗く言うと，**Donaldson 不変量**とはモジュライ空間 $\mathcal{M}_k^{\text{inst}}$ が代表する $\mathcal{B}_k^*$ のホモロジー類のことである．これは，X の Riemann 計量 g に依存しない X の微分同相不変量を与える．これは不正確な言い方で，一般には $\mathcal{M}_k^{\text{inst}}$ はコンパクトでなく，$\mathcal{M}_k^{\text{inst}}$ が $\mathcal{B}_k^*$ のホモロジー類を与えるわけでない．しかし，Donaldson はモジュライ空間の無限遠の様子を Uhlenbeck

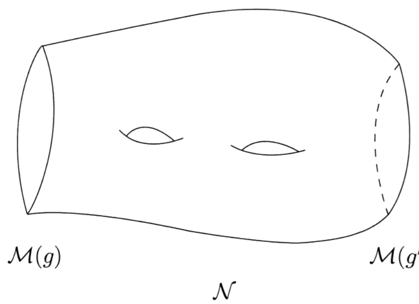


図2 2つのモジュライ空間の間の同境.

のある定理を用いて解析し，$k > \frac{3}{4}(1 + b^+(X))$ のとき，各コホモロジー類 $\alpha \in H^*(\mathcal{B}_k^*; \mathbb{Q})$ を $\mathcal{M}_k^{\text{inst}}$ 上で積分した値 $\langle \alpha, [\mathcal{M}_k^{\text{inst}}] \rangle \in \mathbb{Q}$ に相当するものが定義できることを示した．さらに，この値は X の Riemann 計量によらない．これは次のようにして分かる．g, g' を 2 つの X の Riemann 計量とする．2 つの間の Riemann 計量の道 $\{g_t\}_{0 \le t \le 1}$ をとる．($g_0 = g$, $g_1 = g'$) $\mathcal{N} = \cup_{0 \le t \le 1} \mathcal{M}_k^{\text{inst}}(g_t) \times \{t\} \subset \mathcal{B}_k^* \times [0, 1]$ を考える．($\{g_t\}_{0 \le t \le 1}$ を少し摂動すると) $\mathcal{N}$ も滑らかな多様体となり，その境界が $\mathcal{M}_k^{\text{inst}}(g) \coprod \mathcal{M}_k^{\text{inst}}(g')$ となる（図 2)．ここに Stokes の定理を適用すると，$\langle \alpha, [\mathcal{M}_k^{\text{inst}}(g)] \rangle = \langle \alpha, [\mathcal{M}_k^{\text{inst}}(g')] \rangle$ を得る（ただし，$\mathcal{N}$ はコンパクトでないため，Stokes の定理を適用するとき注意が必要となる)．このように $H^*(\mathcal{B}_k^*; \mathbb{Q})$ の双対の元が得られる．これが Donaldon 不変量である．

Donaldson はある消滅定理と非消滅定理の 2 つを証明した．X, Y を $b^+ > 0$ なる 4 次元多様体とする．このとき，X, Y の連結和 $X \# Y$ に対して，Donaldson 不変量が自明になるというのが消滅定理である．連結和とは，X, Y から，小さい 4 次元球を取り除き，境界の S^3 に沿って 2 つの多様体を張り合わせてできる多様体である．一方，$b^+ > 1$ の単連結な射影的複素曲面に対して，不変量が非自明であるというのが非消滅定理である．これら 2 つの計算の直接的な帰結として，$b^+ > 1$ の単連結な射影的複素曲面は，$X \# Y$ $(b^+(X), b^+(Y) > 0)$ という形に書けない，ということが分かる．また，Freedman の定理や 2 次形式の基本的な事実と組み合わせると，$b^+ > 3$ を満たす単連結な射影的複素曲面に対して，同相だが微分同相でない 4 次元多様体が存在することが分かる．

5. Seiberg–Witten 理論

1994 年，Witten により新しい 4 次元多様体の不変量が導入された[8]．Seiberg と Witten による $N = 2$ 超対称 Yang–Mills 理論の研究から，Witten は **Seiberg–Witten 方程式**，または**モノポール方程式**と呼ばれる新しい方程式を導入し，その解のモジュライ空間から 4 次元多様体の不変量を定義した．この不変量は **Seiberg–Witten 不変量**と呼ばれる．さらに，Witten は Donaldson 不変量と Seiberg–Witten 不変量は等価な不変量と予想し，Donaldson 不変量を Seiberg–Witten 不変量で書き表す公式を書き下した．この公式は物理的な議論によって導出されたもので，数学的に厳密に証明されたわけではない．Pidstrigach–Tyurin により，非可換モノポール方程式を用いた数学的証明のアイデアが提出された．非可換モノポールの方法は Feehan–Leness により研究が進められ，多くの 4 次元多様体に対して，Witten の予想が正しいことが証明されている．

Seiberg–Witten 不変量の構成は Donaldson 不変量の構成とほぼ平行している．Donaldson 不変量と同様に $b^+(X) > 1$ なる閉 4 次元多様体に対して定義できる．大きく違うところは，モノポール方程式の解のモジュライ空間は常にコンパクトであり，Donaldson 不変量の構成よりコンパクト性に関する部分は著しく簡単になる．また，モジュライのコンパクト性により，具体的な計算がしやすくなっている．Witten の予想は，Donaldson 不変量の計算をより扱いやすい Seiberg–Witten 不変量の計算に帰着できるということを意味する．

Seiberg–Witten 方程式について簡単に説明する．Seiberg–Witten 方程式は，スピノール束の切断とその行列式束の接続に対する方程式である．4 次元多様体 X の Riemann 計量と spin-c 構造を選ぶ．spin-c 構造とは，X の接束 TX に付随する主

$SO(4)$ 束 P_X の $Spin^c(4) = Spin(4) \times_{\pm 1} U(1)$ を構造群とする主束 $\tilde{P}_X$ への持ち上げと，同型 $\tilde{P}_X/U(1) \cong P_X$ の対のことである（$Spin(4)$ は $SO(4)$ の二重被覆である）．spin-c 構造を選ぶと，スピノール束と呼ばれる2つの階数2の複素ベクトル束 $S^{\pm} \to X$ を得る．さらに，行列式束 $\det S^+$ の接続 A に対して，Dirac 作用素と呼ばれる1階の楕円型微分作用素

$$D_A : \Gamma(S^+) \to \Gamma(S^-)$$

を考えることができる（$\Gamma(S^{\pm})$ は $S^{\pm}$ の切断の空間である）．Seiberg–Witten 方程式は $\psi \in \Gamma(S^+)$ と $\det S^+$ の接続 A に対する方程式で

$$\begin{cases} D_A\psi = 0, \\ F_A^+ + q(\psi) = \eta \end{cases} \tag{1}$$

と書かれる．ここで，$q(\psi)$ は ψ に関する2次形式である．また，η は自己双対な X 上の 2-形式であり，方程式の摂動である．

Seiberg–Witten 不変量は，方程式 (1) の解のモジュライ空間上で，あるコホモロジーを積分することで定義される．X の Riemann 計量 g や方程式の摂動 η に依存しないことは，Donaldson 不変量と同様に同境の議論により証明できる．Donaldson 理論の場合は同境はコンパクトでなかったが，Seiberg–Witten 理論ではモジュライ空間がコンパクトであり，通常の意味での同境になっている．

Seiberg–Witten 不変量に関する基本的な性質をいくつか述べる．Seiberg–Witten 不変量は，$b^+ > 0$ なる2つの4次元多様体の連結和に対して自明である．これは，Donaldson 不変量と同様である．Witten はさらに，4次元多様体が正のスカラー曲率を持つ場合に，Seiberg–Witten 不変量が自明であることを証明した．Witten の予想が正しいとすると，Donaldson 不変量も自明になることがいえる．Seiberg–Witten 理論により初めて明らかになったことである．また，Taubes により $b^+ > 1$ なる4次元シンプレクティック多様体に対して，Seiberg–Witten 不変量が非自明であることが証明された．射影的複素曲面に対する Donaldson 不変量の非消滅定理よりも，はるかに多くの4次元多様体に対する非消滅定理である．Witten の予想が正しければ，Donaldson 不変量がシンプレクティック多様体に対して非自明であることが導かれる．Kronheimer と Mrowka はこのことを用いて，結び目理論におけるある予想を解いている[6]．

6. 有限次元近似

Seiberg–Witten 理論により，11/8 予想が大きく進展した．Seiberg–Witten 方程式を用いて，古田幹雄氏が次を証明したのである．

定理 4　X が閉スピン4次元多様体で，交叉形式 Q_X が定値でないとすると

$$b_2(X) \geq \frac{10}{8}|\mathrm{sign}(X)| + 2. \tag{2}$$

古田氏の方法は，方程式の解のモジュライ空間ではなく，方程式自身を扱う．粗く言うと，Seiberg–Witten 方程式は，ある2つの Hilbert 空間の間の写像 $f : H \to H'$ を与える．H, H' はそれぞれ実 Hilbert 空間 $H_{\mathbb{R}}, H'_{\mathbb{R}}$ と複素 Hilbert 空間 $H_{\mathbb{C}}, H'_{\mathbb{C}}$ の直和になっている．$H_{\mathbb{C}}, H'_{\mathbb{C}}$ に $U(1) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\}$ がスカラー倍により作用していて，f はその作用に関して同変になっている．解のモジュライ空間は，$f^{-1}(0)/U(1)$ になっている．古田氏が証明した重要なことは，f がよい有限次元近似を持つということである．つまり，十分大きい有限次元部分空間 $W \subset H'$ をとると，有限次元部分空間 $V \subset H$ が決まり，f の有限次元近似 $f_W : V \to W$ が得られる．さらに，f_W は proper 写像になっている（proper 写像とは，コンパクトな集合の逆像がコンパクトであるような写像のことである）．f_W が proper であることは，モジュライ空間のコンパクト性と密接に関係している．f_W が proper であることから，V, W の一点コンパクト化した空間の写像 $f_W^+ : V^+ \to W^+$ を得る．f_W^+ と同変 K 理論にお

ける巧みな計算を用いて，古田氏は不等式 (2) を証明した．

Seiberg–Witten 方程式の有限次元近似によって，4 次元多様体の新しい不変量を構成することもできる．S. Bauer と古田氏は，V, W を大きくするにつれ，有限次元近似 $f_W^+ : V^+ \to W^+$ の $U(1)$ 同変ホモトピー類が，(ある意味で) 安定することを示した．$b^+ > 1$ のとき，その安定ホモトピー類は 4 次元多様体の不変量となる．

Bauer は $b_1 = 0$, $b^+ \equiv 3 \mod 4$ を満たす 2 つのシンプレクティック多様体の連結和に対して，**Bauer–古田不変量**が非自明であることを証明した．通常の Seiberg–Witten 不変量は連結和に対して自明であるので，この非消滅定理は Bauer–古田不変量が通常の Seiberg–Witten 不変量よりも多くの情報を持っていることを意味している．

Seiberg–Witten 方程式の有限次元近似は，Pontryagin–Thom 構成の無限次元版といえるものである．Pontryagin–Thom 構成はホモトピー類と枠付き同境群の元を対応させる．Bauer–古田不変量はモジュライ空間が定める，適切に定義されたある種の枠付き同境群の元としても定義できる (Seiberg–Witten 不変量が Riemann 計量や方程式の摂動に依存しないことの証明は，同境を用いたことを思い出してほしい)．有限次元近似により，K 理論，ホモトピー論，同境理論といった古典的な代数的トポロジーの手法をゲージ理論に持ち込めることができるようになった．これにより，Seiberg–Witten 不変量や 4 次元トポロジーに関するより精密な結果が多く導き出されている．

7. さいごに

この原稿を書いている最中に, Donaldson 不変量と Seiberg–Witten 不変量の等価性に関する Witten の予想の大きい進展があった．Göttsche，中島啓氏，吉岡康太氏によって，射影的な複素曲面に対して Witten の予想が正しいことが証明されたようである[4]．

Seiberg–Witten 不変量には，Pontryagin–Thom 構成の無限次元版によって，精密化が構成される．Donaldson 不変量の精密化というのが気になるところである．もし，Donaldson 不変量の精密化が構成できたとすると，やはり Seiberg–Witten 不変量の精密化と等価なのであろうか？ 実はそうではないということを示唆する例が存在する[7]．インスタントン方程式とモノポール方程式の持つ情報は，少し差があるのではないかと思われる．

本稿ではインスタントン方程式とモノポール方程式の 4 次元トポロジーへの応用を，ごく一部であるが，紹介した．これまで得られた，あるいは今後得られる，インスタントン方程式による応用や計算結果と，モノポール方程式によるそれを，つぶさに比較すると 2 つの方程式の情報の差が少しずつ見えてくるかも知れない．そのような視点で，2 つの方程式のトポロジーへの応用を見てみるのも面白いと思う．

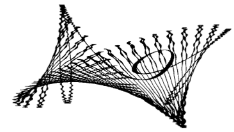
Donaldson 理論と Seiberg–Witten 理論の関係が，これから一層数学的に明らかになるのを期待したい．

参考文献

1) 小林昭七，『接続の微分幾何とゲージ理論』，裳華房．
2) 二木昭人，『微分幾何講義』，サイエンス社．
3) M. Furuta, Monopole equation and the 11/8 conjecture, *Math. Res Lett.* **8** (2001) 279–292.
4) L. Göttsche, H. Nakajima, K. Yoshioka, Donaldson = Seiberg–Witten from Mochizuki's formula and instanton counting, arXiv:1001.5024.
5) Y. Matsumoto, On the bounding genus of homology 3-spheres, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **29** (1982) 287–318.
6) T. Mrowka, P. Kronheimer, Witten's conjecture and Property P, *Geom. Topol.* **8** (2004), 295–310.
7) H. Sasahira, An $SO(3)$-version of 2-torsion instanton invariants. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **15** (2008), 257–289.
8) E. Witten, Monopoles and four-manifolds, *Math. Res. Lett.* **1** (1994), 809–822.

(ささひら・ひろふみ，名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

古典的Chern–Simons不変量と量子Chern–Simons不変量



吉田　朋好

1. はじめに

曲率とトポロジーの関係の研究は多様体の幾何学の美しい流れの一つをなしている．その端緒が19世紀に発見された有名な**Gauss–Bonnetの定理**である．この定理が20世紀の**特性類**と**Chern–Simons不変量**の典雅な原型である．

特性類の理論は**Chern–Weil理論**と呼ばれ，ChernとWeilによって20世紀半ばに展開された．特性類は，多様体上の主束の接続の曲率を用いて定義される**Chern–Weil形式**という微分形式で表される．特性類を多様体上で積分すると特性数という多様体の位相不変量が得られる．こうしてChern–Weil理論は曲率とトポロジーを結びつけるのである．

一方, 1944年ChernはGauss–Bonnetの定理の高次元への一般化を証明した[1]．その手法は多様体の単位球面束上の転入形式（transgression form）と呼ばれるものを作り出したことによるもので, これが**Chern–Simons形式**の原型となった．1974年ChernとSimonsは転入形式を任意の主束上の接続の理論において取りあげてChern–Simons形式を定義し，その積分により主束の接続の不変量であるChern–Simons不変量と呼ばれるものを定義した[2]．

Chern–Simons形式の微分がChern–Weil形式になるというのが両者の関係で，このことから主束のChern–Simons不変量は特性類を‘primary’と呼ぶのに対して，‘secondary’と呼ぶのがならわしである．Chern–Weil形式による特性類が主に偶数次元の多様体の幾何学を記述するものであるのに対し，Chern–Simons形式によるChern–Simons不変量は奇数次元の多様体の幾何学に関連する．またこれらはともにChern–Weil形式，Chern–Simons形式などの微分形式の積分により定義されるという意味で局所的なものである．

Chern–Simons形式はリーマン多様体のユークリッド空間への共形はめ込みに対する障害を与え，特性類の一つである**Pontrjagin類**の組合せ的公式にも登場する．その後Chern–Simons理論はAtiyah–Patodi–Singerのη不変量，Cheager–Simonsのdifferential characterの理論へと発展した．これらをまとめて古典的Chern–Simons不変量と呼ぶことにする．

これらはすべて主束の接続の曲率形式を用いて定義されるが，Chern–Weil形式の表す特性類が直接多様体の位相不変量となるのに対し，Chern–Simons形式は接続の不変量を与えてそのままでは多様体の不変量を与えない．1989年Wittenは結び目のJones多項式に関連して，3次元多様体の位相不変量をChern–Simons形式から作り出した[3]．これは量子場の理論を用いたものなのでこれを量子Chern–Simons不変量と呼ぶことにする．

2. 古典的 Chern–Simons 不変量

まず Chern–Weil と Chern–Simons の祖先にあたる Gauss–Bonnet の定理を思い出してみよう．

'Gauss–Bonnet' というと Gauss と Bonnet が証明したと思うのが自然だが，どうもそうではないらしい．ユークリッド空間内の曲面の Gauss 曲率の積分は Gauss 写像の写像度というもので測ることができる．この写像度が**オイラー数**という位相幾何学的な量に等しいことを最初に証明したのは，Walter van Dyck という人である．だから Gauss–Bonnet の定理を今日述べられるような大域的な形に定式化したのは Walter van Dyck が最初である．微分位相幾何学の標準的な教科書である Hirsch の本『Differential Topology』には "Gauss–Bonnet の定理と間違って呼ばれている" という注釈つきで定理が紹介されている．

Σ を 3 次元ユークリッド空間内の曲面とする．Σ はユークリッド空間の計量から誘導されたリーマン計量を持ち，その曲率は Σ 上の実数値関数 $K:\Sigma\to\mathbf{R}$ で測られる．例えば半径 R の球面の曲率は $1/R^2$ を値とする定値関数である．曲率の研究は 1825 年 Gauss によって始められた．Gauss は有名な *theorema egregium*（驚きの定理）を証明した．それは Gauss 曲率が内在的なものである；つまり曲率は誘導された計量にのみより，曲面のユークリッド空間への入り方にはよらないというものである．リーマン計量は Σ 上の測度（体積要素）$d\mu_\Sigma$ を与える．Gauss–Bonnet の定理とは Σ がコンパクトで境界を持たなければ，等式

$$\int_\Sigma K d\mu_\Sigma = 2\pi\chi(\Sigma) \tag{1}$$

が成り立つことを主張する．ここに $\chi(\Sigma)$ は Σ のオイラー数である．この公式は微分幾何学の第一コースの頂点になっている．これは局所的な幾何学と大域的なトポロジーとのつながりを与える典型的なものである．

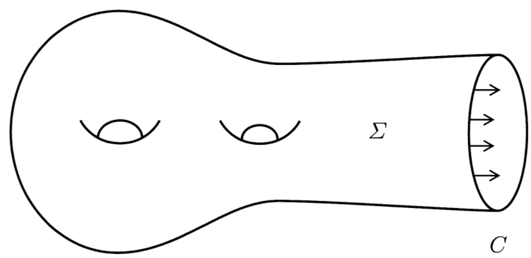
さて Σ が境界を持つとしよう．このときは等式 (1) に境界の全測地曲率という余分な項が現れる．境界 $C\subset\Sigma$ が閉曲線で法バンドルが向きづけを与えられているとする．平面曲線の曲率の一般化として測地曲率 $\kappa_C: C\to\mathbf{R}$ が定義される．κ_C は C が測地線であれば 0 である．計量により，C 上に測度 $d\mu_C$ が誘導され

$$\int_C \kappa_C d\mu_C \tag{2}$$

が C の**全測地曲率**となる．境界のある場合の Gauss–Bonnet の定理は

$$\int_\Sigma K d\mu_\Sigma + \int_{\partial\Sigma}\kappa_{\partial\Sigma}d\mu_{\partial\Sigma} = 2\pi\chi(\Sigma) \tag{3}$$

となる．



3. 接続の Chern–Simons–Weil 理論

G をリー群とし，$\mathfrak{g}$ をリー環とする．多様体 M 上の主 G 束を $\pi: P\to M$ とすると，各 $g\in G$ は P に微分同相写像 $R_g: P\to P$ で作用する．$\theta\in\Omega^1_G(\mathfrak{g})$ を左不変 Maurer–Cartan 形式とする．$i_m: P_m\to P$ を $m\in M$ でのファイバーの包含写像とすれば，P 上の接続は 1 形式 $\Theta\in\Omega^1_G(\mathfrak{g})$ で

$$R_g^*\Theta = Ad_{g^{-1}}\Theta, \quad i_m^*\Theta=\theta \tag{4}$$

がすべての $m\in M$ において成り立つものとして定義される．接続 Θ の曲率は $\mathfrak{g}$ 値 2 形式

$$\Omega = d\Theta + \frac{1}{2}[\Theta\wedge\Theta] \tag{5}$$

で定義される．これは

$$R_g^*\Omega = Ad_{g^{-1}}\Omega, \quad i_M^*\Omega = 0 \tag{6}$$

を満たすので，P に付随するリー代数の随伴束に値を持つ M 上の 2 形式の空間 $\Omega^2_M(\mathfrak{g})$ の元である．

Ω の p 個のウエッジ積 $\Omega\wedge\cdots\wedge\Omega$ は $\mathfrak{g}$ の p 個の直積 $\mathfrak{g}^p$ に値を持つ $2p$ 形式となる．

$$f:\mathfrak{g}^p\to\mathbf{R} \tag{7}$$

を G 不変対称多項式として $f(\Omega\wedge\cdots\wedge\Omega)$ を作れば，これは通常の $2p$ 形式になる．次の命題が，ヤコビ等式 $[[\Theta\wedge\Theta]\wedge\Theta]=0$ と構造方程式 $d\theta+\frac{1}{2}[\theta\wedge\theta]=0$ から得られるビアンキ恒等式 $d\Omega+[\Theta\wedge\Omega]=0$ を用いて証明される．

命題 3.1 $\omega(\Omega)=f(\Omega\wedge\cdots\wedge\Omega)$ は M 上の閉 $2p$ 形式になる．

そこで de Rham の定理により，$\omega(\Omega)$ は M のコホモロジー類を定めることになる．

例 1 Σ を向きづけられた 2 次元リーマン多様体とし，$P\to\Sigma$ を向きづけられた正規直交枠全体のなす $SO(2)$ 束とし，Θ を Levi–Civita 接続とする．$SO(2)$ のリー環は自然に $\mathbf{R}$ と同一視されるので，$p=1$ として (7) の線形写像 f を恒等写像に取って M 上の閉 2 形式が得られる．このとき $\langle\Omega\rangle=K\mathrm{vol}_\Sigma$ となる．ただし，vol はリーマン体積 2-形式を表す．

射影 $\pi:P\to M$ によって P を P 上に引き戻した主束 π^*P は標準的な切断を持ち，自明な主束になる．したがって $\pi^*\omega(\Omega)$ は完全形式になる，つまり，$\pi^*\omega(\Omega)=d\eta$ を満たす P 上の形式が存在する．このような η は一意ではなく，閉形式の分だけ無限に存在する．しかし，この場合は主束とリー群の幾何学を用いてある標準的な構成法で‘最も由緒正しい’ η が作れる．これはコホモロジー群の理論が完成されて多くの応用がなされた後，幾何学の中でコホモロジー群にしてしまうと消えてしまうような情報，微分形式に直接関わる幾何学的な情報を引き出すというその後の流れの中に位置するものである．

標語的に言えば

閉形式が実際にどのように完全形式になるか？
ということに幾何学の情報がある

という哲学に従って，$\pi^*\omega(\Omega)=d\eta$ を満たす，幾何学的に最も情報を得やすい標準的な η を見出すことを試みるのである．

P 上の接続全体の集合 $\mathcal{A}_P$ は無限次元のアフィン空間になり，$\mathcal{A}_P\times M$ 上の主束 $\mathcal{A}_P\times P\to\mathcal{A}_P\times M$ には普遍接続 Θ_P で次の性質により特徴づけられるものがある．

$$\begin{aligned}&\Theta_P|_{\{\Theta\}\times P}=\Theta,\quad \Theta_P|_{\mathcal{A}_P\times\{p\}}=0,\\ &\Theta\in\mathcal{A}_P, p\in P.\end{aligned} \tag{8}$$

Ω_P を Θ_P の曲率とし，$\omega(\Omega_P)$ をその Chern–Weil 形式とする．任意の 2 つの接続 $\Theta_0,\Theta_1\in\mathcal{A}_P$ は線分 $\Delta^1\to\mathcal{A}_P$ の端点になる．Chern–Simons 形式 $\alpha(\Theta_0,\Theta_1)$ を

$$\alpha(\Theta_0,\Theta_1)=\int_{[0,1]}\omega(\Theta_P)\in\Omega_M^{2p-1} \tag{9}$$

と定義する．Stokes の定理から

$$d\alpha(\Theta_0,\Theta_1)=\omega(\Theta_1)-\omega(\Theta_0) \tag{10}$$

が得られる．

主束 $\pi:P\to M$ を写像 π によって自分自身の上に引き戻した P 上の主束 $\pi^*P\to P$ はファイバー積 $P\times_M P$ と同一視され，対角線写像 $\Delta:P\to\pi^*P$ を自然な切断として持つ．この切断は $\Delta^*\Theta_\Delta=0$ で特徴づけられる π^*P 上の自明な接続 $\Theta_\Delta\in\mathcal{A}_{\pi^*P}$ を定義する．これを用いて $\Theta\in\mathcal{A}_P$ に対し Chern–Simons 形式を

$$\alpha(\Theta)=\alpha(\Theta_\Delta,\pi^*\Theta) \tag{11}$$

で定義する．$\alpha(\Theta)$ は P 上の微分形式で

$$d\alpha(\Theta)=\pi^*\omega(\Theta)\in\Omega_P^{2p} \tag{12}$$

が成り立つ．以上の構成はごく自然なものであることを感じてほしい．

例 2 先の例 1 において曲面 Σ が滑らかな曲線 C を境界に持つとする．C に沿う Σ の自然な正規直交枠が存在する（C の接ベクトルを第一ベクトルとする）．この正規直交枠は C から P への切断を与える．Chern–Simons 1-形式 $\alpha(\Theta)$ は C

上の1-形式に引き戻され，$\kappa_C \mathrm{vol}_C$ を与える．

古典 Chern–Simons 不変量は2節の全測地曲率の一般化である．M を向きづけられた $(2p-1)$ 次元閉多様体，Θ を主束 $P \to M$ の接続とする．f を (7) の不変多項式で対応する $\alpha(\theta)$ が整数周期を持つようなものとする．コンパクトで向きづけられた3次元多様体とする．$P \to M$ が自明化可能であるとし，$s: M \to P$ を切断とすれば，Chern–Simons 不変量

$$S(\Theta) = \int_M s^* \alpha(\Theta) \tag{13}$$

が $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ に値を持つ不変量として得られる．これは s によらない．

Chern と Simons が特に興味を持ったのは P がリーマン多様体 M の接ベクトル束で A が Levi–Civita 接続の場合である．このとき，$S(A)$ は M のユークリッド空間への共形はめ込みに対する障害を与える．またもう一つのことは4次元多様体の第1 Pontrjagin 数の組合せ的な公式を与えることであった．

Gauss–Bonnet の定理の右辺の曲面のオイラー数 $\chi(\Sigma)$ はよく知られているように曲面の三角形分割から定義される組合せ的な量であり，この定理は左辺の曲率積分の組合せ的な公式を与えていると見なされる．Gauss–Bonnet の定理の証明は次のように行われる．曲面が三角形分割されているとして，各三角形の上での積分を考える．三角形が可縮なことから Stokes の定理により三角形の上での積分が境界上の線積分になり，各三角形ごとに対数関数の微分から定義される1次形式 $d\log x$ の線積分が得られる．これには回転数という明瞭な位相幾何学的解釈ができるので，積分が三角形分割の組合せ的な量により表現されることになる．

これを高次元に一般化して，微分形式の積分によって与えられた不変量の組合せ的表現を求めるために多様体を単体分割し，各単体の上での積分を考えるわけである．単体は可縮なのでその上の積分は Stokes の定理により境界上での積分になおるが，これを繰り返して組合せ的な量にたどりつくことを考えるのである．

4次元多様体の第1 Pontrjagin 数でこれを考えると4-単体上での積分が部分積分を繰り返すことによって $\frac{\log(1-x)}{x}dx$ という1-形式の線積分に帰着される．$\frac{\log(1-x)}{x}dx$ は初等関数で表される1-形式であるが，この線積分は**2重対数（dilog）関数**と呼ばれる関数になり初等関数ではない：

$$\mathrm{dilog}(x) = \int_0^x \frac{\log(1-s)}{s} ds. \tag{14}$$

不幸にして2重対数（dilog）関数の値を回転数のよう‘わかりやすい’組合せ的な量で解釈することはできない．

これは2重対数（dilog）関数が組合せ的なものとあまり関係しないということではない．事実はその逆で，この関数は大変豊かな組合せ的，数論的に重要な性質を持ち，数学の多くの分野に思いがけない形で現れるのである．ただしその組合せ的な量との関係は読み取るのが非常に難しい場合が多い．実際その興味ある一端はある種の共形場理論の中心荷電というものの中に姿を表し，2重対数（dilog）関数の極だって興味深い関数等式が整数の分割数に関連して現れる．

以上のように Chern と Simons の論文[2)]における当初の目的の一つである「第1 Pontrjagin 数の組合せ的な公式を与える」は達成されたとは言い難いのであるが，古典的 Chern–Simons 不変量はこれらの問題をこえてその後，微分幾何学，大域解析学，トポロジー，理論物理などの広い範囲にまたがって多くの応用を見出すことになった．数学での Chern–Simons 理論とは独立に理論物理でも繰り込み理論に関係した量子異常などで Chern–Simons 形式が見出された．次の節でその一つを紹介する．

4. 量子 Chern–Simons 不変量

$G = SU(2)$ を行列式1の 2×2 ユニタリ行列全体のなすリー群とする．リー環 $\mathfrak{g}$ はトレース0の 2×2 歪エルミート行列全体からなる．M を向きづけられた閉3次元多様体とする．$P = M \times G$ を

自明な M 上の主束とする．P 上の接続 A は M 上の 1 次微分形式を成分とするトレース 0 の歪エルミート行列と見なせる，すなわち，$A \in \Omega^1(M)$ である．この場合は古典 Chern–Simons 不変量は

定義 4.1

$$S(A) = \left(\frac{1}{8\pi^2}\right)\int_M \mathrm{trace}\left(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\right)$$

で与えられる．ただし積分の中味は微分形式の外微分と同時に係数の行列の積を取り，最後に係数行列のトレースをとる．すると積分の中味は M 上の 3 次微分形式であり，積分は M の向きづけによる．これは (2) の 1 次元の全測地曲率の 3 次元での類似物である．

$S(A)$ は接続 A の関数で当然 A を変えれば値は変わり，接続の不変量というべきものになっている．$S(A)$ という量を用いて多様体の幾何学的構造，特に位相不変量を得ようとすると，このままではあまりに細かすぎてうまくゆかない．

Witten は古典 Chern–Simons 不変量 $S(A)$ を用いて 3 次元多様体の位相不変量を定義した．そのプロセスを手短かに述べる．

$S(A)$ は接続 A によって決まるのであるが，これから A によらないものを引き出す古典的なアプローチは，$S(A)$ を変分問題を定義する関数として扱い，その臨界点を見出すことである．これは実際興味のあることで，このとき Euler–Lagrange 方程式は臨界点が**平坦接続**で与えられることを主張する．これを見てみよう．

A の変分 $A \to A + \delta A$ に対し，変分 $\delta S(A) = S(A+\delta A) - S(A)$ の δA の一次の項は

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_M \mathrm{trace}(F_A \wedge \delta A) \tag{15}$$

となるので，A の曲率 $F_A = dA + A \wedge A$ が 0 の平坦接続が臨界点になる．

一般には平坦接続は一意ではなく，どの平坦接続も特別に選ばれる理由を持っていない．しかしながら，平坦接続全体の空間を考えることから，興味ある位相不変量が得られるのである．

Witten はこれを Feynman による量子力学の方法によって行った．すなわち彼は位相不変量を得るのに変数 A を積分してしまったのである．レベルと呼ばれる正の整数 k を固定し，次の「積分」を考える．

定義 4.2

$$F_k(M)' =' \int_{\mathcal{F}_\mathcal{M}} e^{ikS(A)} dA.$$

積分は接続の同値類の空間全体にわたって取られる．つまり $\mathcal{F}_\mathcal{M}$ は無限次元空間 $\Omega^1(M;\mathfrak{g})$ を M から G への写像 $g : M \to G$ 全体のなす無限次元リー群の作用

$$gA = g^{-1}Ag + g^{-1}dg \tag{16}$$

による商空間である．積分の結果は複素数 $F_k(M)$ となる．′　′ がついているのは無限次元空間での測度 dA が存在せず，数学的には右辺の積分が意味をなさないからであるが，以下しばらくこのことは棚上げにして話を進める．積分の中には多様体のリーマン計量に関係する項はないので，これは多様体の位相不変量になる．

$F_k(M)$ が先に述べた古典的な変分問題を量子力学的にやき直したものであることは，$k \to \infty$ のいわゆる $F_k(M)$ の漸近挙動なるものを考えることによりわかる．上の式の右辺を普通の有限次元ユークリッド空間での積分のように考えれば，$k \to \infty$ のとき，$S(A)$ の変分 $\frac{\delta S(A)}{\delta A}$ が 0 でないところでは振動数の変化が無限大になる振動関数の和になり，打ち消し合って消えてしまう．

$F_k(M)$ は平坦接続全体の集合 $\mathcal{A}_0$ 上の積分に書き直されると考えられる．$k \to \infty$ は古典極限を取る操作と言われているものでこれに対し k を有限に取ったものは古典力学の量子化と言われる．つまり，$F_k(M)$ は古典的な $S(A)$ の変分問題を量子化したものであるというわけである．

$F_k(M)$ を考察するのはこのままでやるより**次元簡約 (dimensional reduction)** という方法で 2 次元の問題にやき直す．これは位相幾何学の常套手段である切り張り細工の方策を取ることに相当

する．M を境界 ∂M を持つコンパクト3次元多様体とし，α を境界 ∂M 上の接続とする．$\mathcal{F}_M(\alpha)$ を M 上の接続で ∂M 上で α に等しいもののゲージ同値類の集合とする．$F_k(M)$ を拡張して

定義 4.3

$$F_k(M)(\alpha)' =' \int_{\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(\alpha)} e^{ikS(A)} dA$$

と定義する．$F_k(M)$ は ∂M 上の接続のゲージ同値類の集合 $\mathcal{F}_{\partial M}$ 上の関数である．

$F_k(M)$ も $F_k(M)(\alpha)$ も理論物理の経路積分というもので定義され，数学的には目下のところ無意味である．しかし2次元に次元簡約した $F_k(M)(\alpha)$ のほうは，曲面にリーマン計量を入れて正則化するという手段で，曲面上の平坦束のモジュライ空間の上の正則直線束の切断という数学的に厳密に定義されたものに翻訳することができる．そこでこれを出発点にして量子 Chern–Simons 不変量 $F_k(M)$ を数学的に厳密な方法で定義することが試みられている．

Witten が $F_k(M)$ を提唱して以来25年の間様々な角度から数学的に厳密な方法による定義が作られてきて，そのどれも数学に豊かな成果をもたらしてきた．その一つがカテゴリカルな公理論的な構成法と言われるもので，上に述べた次元簡約をもう一段行い，2次元からさらに1次元におとして考える．1次元まで次元簡約をするとある代数の表現のカテゴリーというものが得られる．このカテゴリーの持つ代数的性質を使って $F_k(M)$ で定義される‘物理的な’不変量を厳密に定義するわけである．今日までこのアプローチは大きく発展してきた．しかし，そのどれもまだ当初 Witten が主張した量子 Chern–Simons 不変量の基本的な性質を備えていることを部分的にしか証明できていない．

3次元の量子 Chern–Simons 不変量は，経路積分という理論物理の考え方の正しさを確かめる一つの実験場所を提供しているようにも見える．結局，無限次元の空間上の単純な積分で書かれたものを有限次元の数学的にきちんとした意味づけのできるものに帰着させることを考えるのであるが，これを試みる過程で驚くほど豊富な数学的現象が現れる．

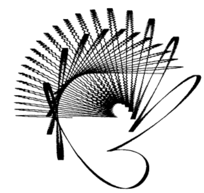
参考文献

1) S.S. Chern, A simple intrinsic proof of the Gauss–Bonnet formula for closed Riemannian manifolds, *Ann. of Math.* **45** (1944), 747–752.
2) S.S. Chern, J. Simons, Characteristic forms and geometric invariants, *Ann. of Math.* **99** (1974), 48–69.
3) E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, *Commun. Math. Phys.* **121** (1989) 351–399.

（よしだ・ともよし，東京工業大学大学院理工学研究科）

特集／現代幾何と方程式

量子コホモロジーと方程式



入谷　寛

1. 量子コホモロジーとは

一般にシンプレクティック多様体 M に対して量子コホモロジーと呼ばれるコホモロジー環の変形を定義することができる．これはもともと物理の弦理論で発見されたもので，そこではシンプレクティック多様体の上を動き回る「ひも」の状態空間に入る環構造（chiral ring）として理解されている[1)]．筆者は弦理論の専門家ではないので残念ながら物理的説明には立ち入ることはできないが，ひもの状態空間は多様体 M のコホモロジー群 $H^*(M)$ と同定され，そこにあるパラメータ q に依存する積 $\circ_q$ が定められる．さらに $\circ_q$ は $q \to 0$ の極限でコホモロジーの通常の積であるカップ積 $\cup$ と一致する．

もともと（コ）ホモロジーは空間のトポロジー，つまり連続変形によって不変な性質を調べるために19世紀末に Poincaré により導入されたもので，基本群やホモトピー群と共にトポロジーにおける重要な道具である．量子コホモロジーは任意の空間ではなくシンプレクティック多様体というやや特殊な空間に対して定義されるものの，多様体の（概）複素構造や計量の連続変形の下での不変性を持つので，やはり一種のトポロジーを見ていると考えられる．シンプレクティック多様体の重要な例として射影的な代数多様体（複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の中の斉次多項式たちのゼロ点として書ける集合）があるから，量子コホモロジーは代数幾何と相性が良いトポロジーなのかもしれない．

通常のコホモロジーは位相空間の圏から環の圏への関手であって連続写像 $f\colon M \to N$ が与えられるとき環の準同型 $f^*\colon H^*(N) \to H^*(M)$ が定まっていた．量子コホモロジーの一つの難点は写像に関する関手性（functoriality）が明らかでないことである．筆者の現在の研究の目的の一つはこの関手性を明らかにすることであるが，一つの興味深い現象としては2つの双有理（birational）な射影代数多様体の量子コホモロジーがパラメータ q の解析接続によりつながるという現象がある．一般に双有理変換においては古典的なトポロジーは変わる可能性があるので，この量子のトポロジーはそれよりもより広い意味でのトポロジーを捉えているわけである．本論説の最後で述べるように，量子コホモロジーにおけるこのような形の関手性はコホモロジー群（のループ空間）上のシンプレクティック幾何学を用いて記述できると予想される．

まず多様体 M の（コ）ホモロジーについて簡単に復習する．実 $2n$ 次元の多様体 M に対して，k 次元のホモロジー群 $H_k(M)$ とは大雑把にいって M の中の k 次元の「境界のない形」（サイクル）の1次結合全体のなすアーベル群であった[2)]．ここでは係数を複素数体にとり，サイクルの複素数係数の1次結合を考えるので，（コ）ホモロジー群は $\mathbb{C}$ ベクトル空間である．M がコンパクトで向き付け可能であると仮定すると，Poincaré 双対性によって $(2n-k)$ 次のコホモロジー群 $H^{2n-k}(M)$ は k 次のホモロジー群 $H_k(M)$ と同一視される．

$$\mathrm{PD}\colon H_k(M) \cong H^{2n-k}(M).$$

コホモロジーをご存じでない方は，この事実により $H^{2n-k}(M)$ の元を k 次元のサイクルと思って差し支えない．すべての次数にわたって足し上げたベクトル空間

$$H^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{2n} H^k(M)$$

をコホモロジー群と呼ぶ．コホモロジーには2つの重

要な構造が入っている．**Poincaré ペアリング** $(\cdot,\cdot)$ と**カップ積** $\cup$ である．

$$(\cdot,\cdot) : H^*(M)\times H^*(M)\to\mathbb{C},$$
$$\cup: H^*(M)\times H^*(M)\to H^*(M).$$

これらは次のように定義される．A_1, A_2 を $2n-k$ 次元，$2n-l$ 次元のサイクルとし，$\alpha_1 = \mathrm{PD}[A_1]$, $\alpha_2 = \mathrm{PD}[A_2]$ を Poincaré 双対な k 次，l 次のコホモロジー類とする．このとき，次が成り立つ．

$$(\alpha_1,\alpha_2) = \sharp(A_1\cap A_2),$$
$$\alpha_1\cup\alpha_2 = \mathrm{PD}[A_1\cap A_2].$$

ここでサイクル A_1, A_2 は一般の位置にあると仮定されている．$\sharp(A_1\cap A_2)$ は A_1, A_2 の（符号付きの）交点の数であり，$k+l=2n$ のとき以外は 0 と定義される．また $2n-k$ 次元のサイクル A_1 と $2n-l$ 次元のサイクル A_2 の交わり $A_1\cap A_2$ は（一般の位置の仮定から）$2n-(k+l)$ 次元であるから，$\alpha_1\cup\alpha_2$ は $k+l$ 次のコホモロジー類を与えている．つまり Poincaré ペアリングとはサイクルの交点数であり，カップ積とはサイクルの交わりである．Poincaré ペアリングが非退化であることから，カップ積は次の性質で定義することもできる．

$$(\alpha_1\cup\alpha_2,\alpha_3) = \sharp(A_1\cap A_2\cap A_3). \tag{1}$$

ここで $\alpha_3 = \mathrm{PD}[A_3]$ であり，A_1, A_2, A_3 はやはり一般の位置にあると仮定している．カップ積は符号付き可換[3]で結合的な積を定め，3 つ組 $(H^*(M),\cup,(\cdot,\cdot))$ は **Frobenius 代数**をなしている．つまりペアリング $(\cdot,\cdot)$ と積 $\cup$ は次の関係を満たす．

$$(\alpha_1\cup\alpha_2,\alpha_3) = (\alpha_1,\alpha_2\cup\alpha_3).$$

量子コホモロジーとは積構造を変えることにより，Frobenius 代数 $(H^*(M),\cup,(\cdot,\cdot))$ を変形したものである．ただし，ベクトル空間 $H^*(M)$ とペアリング $(\cdot,\cdot)$ は変わらない．以下では簡単のためシンプレクティック多様体 M は可積分な複素構造を持ち，そのシンプレクティック形式が $(1,1)$ 形式，つまり Kähler であると仮定する[4]．コホモロジー群上の新しい積 $\circ_q$ は (1) に「量子効果」を加えた次の式で定められる．

$$(\alpha_1\circ_q\alpha_2,\alpha_3) = \sharp(A_1\cap A_2\cap A_3) + \sum_{\substack{d\in H_2(M,\mathbb{Z})\\ d\neq 0}} \langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle_{0,3,d}\, q^d. \tag{2}$$

ここで，$\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle_{0,3,d}$ は次数が d, 種数 0 の **Gromov–Witten 不変量**と呼ばれ，大雑把に言うと，球面 $S^2 = \mathbb{CP}^1$ から M への正則写像でサイクル A_1, A_2, A_3 に交わり，像のホモロジー類が $d\in H_2(M,\mathbb{Z})$ であるようなものの個数である[5]（図 1 参照）．

$$\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle_{0,3,d} \text{``}=\text{''} \sharp\Big\{ f\colon \mathbb{CP}^1\to M \;\Big|\; f \text{ は正則写像}^{6)},\ f_*[\mathbb{CP}^1]=d,\ f(0)\in A_1, f(1)\in A_2, f(\infty)\in A_3 \Big\}. \tag{3}$$

式 (2) に現れる記号 q^d は形式的には整係数 2 次元ホモロジー群 $H_2(M,\mathbb{Z})$ の群環の元であって，$q^{d_1}q^{d_2} = q^{d_1+d_2}$ を満たすものである．例えば $H_2(M,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ であれば q を 1 つの（複素）変数と見なすことができる．一般には q は $H_2(M,\mathbb{Z})$ の階数だけの多重変数と見なされる．ここで重要なことは，任意のホモロジー類 $d\in H_2(M,\mathbb{Z})$ が $\mathbb{CP}^1$ からの正則写像として実現されるわけではなく，ある種の「正」なホモロジー類 d のみが正則写像で実現できるという事実である．より正確に言うと $H_2(M,\mathbb{R})$ 内の森 cone と呼ばれるある凸錘に含まれるホモロジー類 d のみが正則写像で代表される．もし d が「正」でない，つまり森 cone に属さないとき，Gromov–Witten 不変量 $\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle_{0,3,d}$ はゼロである．従って $H_2(M,\mathbb{Z})$ の正な基底に対応する変数 q をとるならば式 (2) において $q\to 0$ の極限が存在し，その極限で (2) は (1) に帰着する．つまり

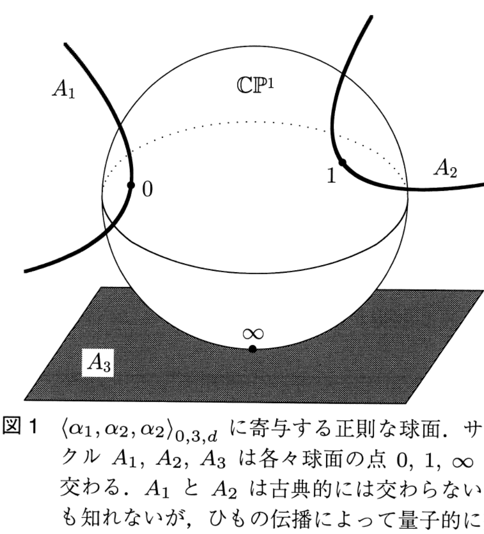


図 1　$\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2\rangle_{0,3,d}$ に寄与する正則な球面．サイクル A_1, A_2, A_3 は各々球面の点 0, 1, ∞ で交わる．A_1 と A_2 は古典的には交わらないかも知れないが，ひもの伝播によって量子的に交わっていると考えられる（伝播するひもによって掃かれる曲面が $\mathbb{CP}^1$）．

$$\lim_{q\to 0}\circ_q = \cup$$

であることが分かる．また定義 (2) からほぼ明らかであるが，Frobenius 代数の性質

$$\big(\alpha_1 \circ_q \alpha_2, \alpha_3\big) = \big(\alpha_1, \alpha_2 \circ_q \alpha_3\big)$$

が成り立っていることもわかる．

物理的にはパラメータ q は多様体 M の計量あるいは大きさを表しており，$\omega \in \Omega^2_M$ をシンプレクティック形式，B を B 場（シンプレクティック形式と対になる「虚部」）とするとき，

$$q^d = \exp\left(-\int_d (\omega - iB)\right)$$

という値が割り当てられる．この解釈の下では $q \to 0$ の古典極限は体積が大きくなる極限（シンプレクティック形式 ω を $r\omega$ に置き換えて $r \to \infty$ とする）に対応し，**極大体積極限**（large volume limit）と呼ばれる．また 2 次のコホモロジーの勝手な元 $t \in H^2(M)$ に対して

$$q^d = \exp\left(\int_d t\right) \tag{4}$$

とおくことにより，$\circ_q$ を $t \in H^2(M)$ でパラメトライズされる積の族と考えることができる[7]．後で $t \in H^*(M)$ でパラメトライズされるより大きな量子コホモロジーが出てくるが，それとの対比でこの節における量子コホモロジーを「小」量子コホモロジーと呼ぶこともある．

量子コホモロジーの簡単な例を 1 つ挙げておこう．多様体 M を射影空間 $\mathbb{CP}^2$ とし，$p \in H^2(\mathbb{CP}^2)$ を直線 $\mathbb{CP}^1 \subset M$ の Poincaré 双対とする．通常のコホモロジー環は $\mathbb{C}$ ベクトル空間として $1, p, p^2$ で生成され，関形式 $p^3 = 0$ を満たす．量子コホモロジー環においてはこの関係は

$$p \circ_q p = p^2, \quad p \circ_q p^2 = p \circ_q p \circ_q p = q \cdot 1$$

のように変形される．例えば 2 番目の式は $\mathbb{CP}^2$ 内の 2 点を通る直線がただ一つであることから従う．

2. WDVV 方程式

量子コホモロジーの積 $\circ_q$ が（符号付き）可換であることは比較的容易に見ることができるが，$\circ_q$ が結合的であることは非自明である．量子コホモロジーの積の結合性を要求する方程式を WDVV（Witten–Dijkgraaf–Verlinde–Verlinde）方程式と呼ぶ．以下ではなぜ $\circ_q$ が結合的であるかを絵を使って説明してみよう．結合性の方程式つまり WDVV 方程式は次の形で与えられる．

$$\big((\alpha_1 \circ_q \alpha_2) \circ_q \alpha_3, \alpha_4\big) = \big(\alpha_1 \circ_q (\alpha_2 \circ_q \alpha_3), \alpha_4\big). \tag{5}$$

ここで $\alpha_1, \cdots, \alpha_4$ は任意のコホモロジー類である．コホモロジー類 α_i に Poincaré 双対なサイクルを A_i とすると (5) の左辺は

$$\sum_{d \in H_2(M,\mathbb{Z})} \left(\begin{array}{c}\text{図 2 の上側に示された}\\ \text{次数 } d \text{ の正則球面鎖の数}\end{array}\right) q^d$$

と書けることがわかる．図 2 は 4 つのサイクル A_1, A_2, A_3, A_4 に交わる正則な球面の 2 連鎖を表しており，上側の図はサイクル A_1 と A_2 がまず左側の球面で「量子的」に交わり，さらに右側の球面で A_3 と量子的に交わる様子である．一方，式 (5) の右辺は同様の式により図 2 の下側にあるような正則な球面鎖の数え上げから定まる．従ってこの 2 つの球面鎖の数が等しいことを示せばよい．このことは次の議論から説明される．球面 $\mathbb{CP}^1$ 上の互いに異なる 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 を固定し次の集合を考えよう．

$$\Big\{ f\colon \mathbb{CP}^1 \to M \;\Big|\; f \text{ は正則写像}, f_*[\mathbb{CP}^1] = d, \; f(z_i) \in A_i, i = 1,2,3,4 \Big\}. \tag{6}$$

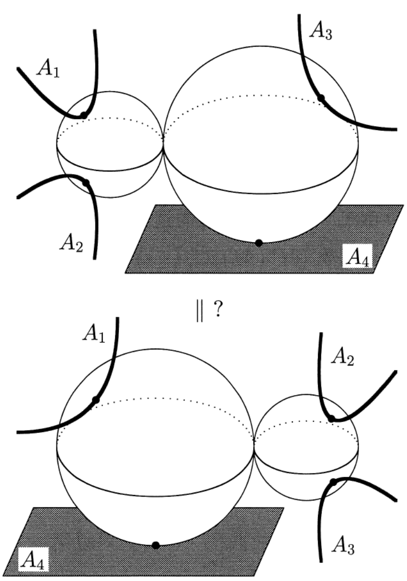


図 2　正則な球面鎖の数え上げ．上が式 (5) の左辺に，下がその右辺に各々寄与する球面鎖である．

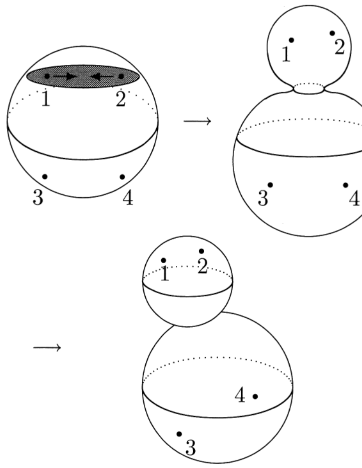


図3　2つに分かれる球面.

この集合を定義する方程式が横断性の条件を満たし，この集合が離散な有限個の点からなると仮定しよう．このとき4点の位置 z_1, z_2, z_3, z_4 を連続的に変化させてもこの集合の（符号付きの）点の数は変化しないと考えられる．いま z_3 と z_4 を止めたまま z_1 と z_2 が互いに近づく極限を考えるとき，図3にあるように球面は引きちぎられて2つの球面の連鎖になると思うことにする．このとき集合 (6) の個数はちょうど図2の上側の球面鎖の個数を与えるであろう．一方 z_1 と z_4 を止めたまま z_2 と z_3 が互いに近づく極限を考えると集合 (6) の個数はちょうど図2の下側の球面鎖の個数を与えるであろう．従って図2における上側の球面鎖の数と下側の球面鎖の数は等しいのである．

球面が図3のように2つに分かれると考える理由は次のとおりである．$\mathbb{CP}^1$ から M への正則写像全体には $\mathbb{CP}^1$ の正則自己同型（一次分数変換）

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

が右からの合成で作用する．従って z_1, z_2, z_3, z_4 の絶対的な位置にはそれほど意味はなく，それらの間の相対的な位置が重要である．例えば z_3 と z_4 を固定したまま z_1 と z_2 が互いに近づくというのは，z_1 と z_2 を固定して z_3 と z_4 が互いに近づくことと同値である．一方 z_1 と z_2 が $\mathbb{CP}^1$ 上で近付いたとしても正則写像 f による像 $f(z_1), f(z_2)$ は M の異なるサイクル A_1, A_2 の上になくてはならないので，$f(z_1)$ が $f(z_2)$ に近づけるとは限らない．そこで z_1, z_2 の立場，z_3, z_4 の立場を両方尊重することにして，極限では f の定義域として2つの球面からなる鎖を考えるのである[8]．またこのような極限操作をとることで f の次数 d を保つことができる．

3. 大量子コホモロジーと Dubrovin 接続

以上では $H^2(M)$ でパラメトライズされる「小」量子コホモロジーを扱ってきたが，パラメータ空間を拡大して $H^*(M)$ でパラメトライズされる「大」量子コホモロジーを考えることができる．今まで3点付きの場合のみを扱ってきたが，ここでは一般に n 点付きの Gromov–Witten 不変量が必要となる．正確な定義は与えないが n 点付き Gromov–Witten 不変量 $\langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \rangle_{0,n,d}$ とは大雑把にいって $\mathbb{CP}^1$ から M への次数 d の正則写像であってその像が $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ に Poincaré 双対なサイクル $A_1, \cdots, A_n$ に交わるものの数である．任意のコホモロジー類 $t \in H^*(M)$ に対して積 $\circ_t$ を次の式で定義しよう．

$$(\alpha_1 \circ_t \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{d \in H_2(M,\mathbb{Z})} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \overbrace{t, \cdots, t}^{n} \right\rangle_{0,n+3,d}.$$

積 $\circ_t$ のパラメータ t を $H^2(M)$ に制限し，さらに変数 q を式 (4) により $H^2(M)$ の変数と同一視すると積 $\circ_t$ は前に述べた積 $\circ_q$ に帰着することが分かる．また $\circ_t$ に関する WDVV 方程式も成り立ち，符号付き可換で結合的な積になっている．点の数が増えても WDVV 方程式が成り立つ理由は基本的に前と同じであるが，大量子コホモロジーに対する WDVV 方程式は時には大変強力である．例えば先ほど紹介した $\mathbb{CP}^2$ の場合は小量子コホモロジーから WDVV 方程式を使って大量子コホモロジーが一意に回復される．$\mathbb{CP}^2$ 上の一般の位置にある $3d-1$ 個の点を通る次数 d の正則な球面の数を N_d

$$N_d = \left\langle \overbrace{[\mathrm{pt}], [\mathrm{pt}], \cdots, [\mathrm{pt}]}^{3d-1} \right\rangle_{0,3d-1,d}$$

（$[\mathrm{pt}] \in H^4(\mathbb{CP}^2)$ は1点の Poincaré 双対）とおくと WDVV 方程式は次の再帰方程式

$$N_d = \sum_{k+l=d} N_k N_l k^2 l \left(l \binom{3d-4}{3k-2} - k \binom{3d-4}{3k-1} \right)$$

を導き，初期値 $N_1 = 1$ からすべての N_d を計算する

ことができる[9)].

WDVV 方程式は Dubrovin 接続と呼ばれるパラメータ z 付きの接続の平坦性として書き換えることができ，量子コホモロジーが微分方程式や D 加群と深い関わりを持つことが分かる．**Dubrovin 接続**とは自明なベクトル束 $H^*(M)\times H^*(M)\to H^*(M)$ 上の接続であって次の式で定義される．

$$\nabla^{(z)}_X = d_X + \frac{1}{z} X \circ_t .$$

ここで $X\in H^*(M)$ であり d_X は与えられた自明化に関する X 方向への方向微分である．この接続は任意のパラメータ $z\in\mathbb{C}^\times$ に関して平坦（flat）であることがわかる．実際，$X, Y\in H^*(M)$ に対して

$$\begin{aligned}[\nabla^{(z)}_X, \nabla^{(z)}_Y] =& [d_X, d_Y] + \\ & \frac{1}{z}(d_X(Y\circ_t) - d_Y(X\circ_t)) + \frac{1}{z^2}[X\circ_t, Y\circ_t]\end{aligned}$$

であるが，右辺第 1 項は明らかに 0 で，第 2 項は消えることが簡単にわかり，第 3 項は結合性（WDVV 方程式）から 0 となる．接続の平坦性から $H^*(M)\times\mathbb{C}^\times$ 上のコホモロジー値関数 $s(t,z)$ に対する微分方程式

$$\nabla^{(z)}_X s(t,z) = 0, \quad \forall X\in H^*(M) \tag{7}$$

は任意の初期値 $s(t_0,z)$ に対して一意な解を持つ．この微分方程式を満たす関数 s は平坦切断と呼ばれ，すべての平坦切断のなす空間はコホモロジー群 $H^*(M)$ と同じ次元のベクトル空間となる．この平坦切断の空間の基底を与える行列を**基本解**と呼ぶ．正確には $\mathrm{End}(H^*(M))$ に値を持つ $H^*(M)\times\mathbb{C}^\times$ 上の関数 $L(t,z)$ であって，任意のコホモロジー類 $\alpha\in H^*(M)$ に対して $s_\alpha(t,z)=L(t,z)\alpha$ が上の微分方程式 (7) を満たし，任意の (t,z) に対して $L(t,z)$ が可逆なものである．基本解のとり方はいろいろあるが，極大体積極限 $q\to 0$ において

$$L(t,z)\sim \exp\left(-\frac{t}{z}\right)$$

という漸近挙動を持つものが一意に存在する．以下ではこの条件で規格化された基本解を考えよう．

4. Givental の Lagrangian 錘

量子コホモロジーの WDVV 方程式はさらに無限次元のシンプレクティック幾何学の言葉で言い換えられることを見よう．次のコホモロジーに値をとる L^2 ループ空間を考える．

$$\mathcal{H} = H^*(M)\otimes L^2(S^1,\mathbb{C}).$$

ここでループ S^1 の変数は Dubrovin 接続に現れるパラメータ z と同一視される．このループ空間には $\mathbb{C}$ 上双線型なシンプレクティック形式 Ω が定まる．

$$\Omega(f(z), g(z)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S^1}\big(f(-z), g(z)\big)\, dz.$$

このシンプレクティック形式に関して $(\mathcal{H},\Omega)$ を無限次元のシンプレクティックベクトル空間と思うことができる．Ω に関する Lagrangian 部分空間[10)] T_t を

$$T_t = L(t,z)^{-1}\left(H^*(M)\otimes L^2_+(S^1,\mathbb{C})\right)$$

で定義する．ここで $L(t,z)$ は上記の基本解であり，$L^2_+(S^1,\mathbb{C})$ は $L^2(S^1,\mathbb{C})$ の元であって円盤 $D^2=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|\le 1\}$ 内の正則関数に拡張されるもの全体である．**Givental の Lagrangian 錘** $\mathcal{L}$ とは次で与えられる $\mathcal{H}$ の部分多様体である[11)].

$$\mathcal{L} = \bigcup_{t\in H^*(M)} zT_t.$$

$\mathcal{L}$ は定数倍で閉じているので錘（cone）であり，さらに次の性質を持っている．

- 部分集合 $zT_t\subset\mathcal{L}$ の任意の点での $\mathcal{L}$ の接空間はその点によらず T_t に等しい．
- 特に $\mathcal{L}$ は Lagrangian 部分多様体である．
- $zT_t = \mathcal{L}\cap T_t$.

これらの $\mathcal{L}$ の幾何学的性質は非常に特殊なものである．つまり，無限次元であるにも関わらず，$\mathcal{L}$ の接空間 T_t は有限次元のパラメータ $t\in H^*(M)$ でパラメータ付けされ，さらに接空間 T_t と $\mathcal{L}$ の交わりが極めて大きな部分空間 zT_t になっている[12)]．ここで zT_t は無限次元の空間で T_t における余次元がちょうど $\dim H^*(M)$ に等しい．さらにこの Lagrangian 錘 $\mathcal{L}$ はもともとの量子コホモロジーと等価な情報を持っていることも分かる．一般にシンプレクティック多様体の Lagrangian 部分多様体は局所的にある関数の微分のグラフとして書くことができる．実際 Givental は Lagrangian 錘を descendant Gromov–Witten 不変量の母関数 $\mathcal{F}^0$ の微分のグラフと同定した[11)].

Givental たちの研究により，このコホモロジー群のループ空間上のシンプレクティック幾何学の枠組みは量子コホモロジーや Gromov–Witten 理論において大変有用であることが示されている．例えば多様体

M の量子コホモロジーから作られる Lagrangian 錘 $\mathcal{L}_M$ と M 内の超曲面 N から作られる Lagrangian 錘 $\mathcal{L}_N$ の関係はある線形シンプレクティック変換で記述される[13]．さらに高い種数の（正則な）曲面を数え上げる「高種数」Gromov–Witten 理論においては，高種数 Gromov–Witten 不変量の母関数 $\mathcal{F}^g$ を $\mathcal{H}$ の幾何学的量子化から得られる Fock 空間の元として理解することができる．その枠組みでは量子コホモロジーにおける対称性のいくつかが量子化された形で高種数 Gromov–Witten 理論の対称性に持ちあがると予想されており，例えば Virasoro 予想がよく知られている．

5. 量子コホモロジーの関手性

最後に異なる多様体の量子コホモロジーの間のある種の関手性について述べたい．2 つの射影代数多様体 M_1, M_2 があって M_1 は高々商特異点のみを持ち軌道体（orbifold）で，M_2 は M_1 の特異点解消になっていると仮定しよう．Yongbin Ruan による**クレパント解消予想**とは特異点解消 $\pi\colon M_2 \to M_1$ がクレパント，つまり標準類について $\pi^*(K_{M_1}) = K_{M_2}$ が成り立つとき，M_1 の量子コホモロジーと M_2 の量子コホモロジーがそのパラメータ q の解析接続の下で同型になる，という予想である．ここでパラメータ q の解析接続が必要であることに注意しよう．解析接続の下では M_1 の極大体積極限 $q_1 \to 0$ と M_2 の極大体積極限 $q_2 \to 0$ は一般に異なるので，古典的なコホモロジー環が同型になるとは限らない．より一般に M_1, M_2 が K 同値であるとき，あるいは M_1 と M_2 の導来圏が同値であるときにも同様の解析接続が成り立つと予想されている．我々は T. Coates 氏，H-H. Tseng 氏との共同研究において Givental の Lagrangian 錘を用いて Ruan の予想を次の形に定式化した[14,15]．

予想． $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ を M_1, M_2 のコホモロジー群上のループ空間として与えられるシンプレクティックベクトル空間とし，$\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ を M_1, M_2 の量子コホモロジーに付随する Lagrangian 錘とする．$L^2(S^1, \mathbb{C})$ 上線型なシンプレクティック同型 $\mathbb{U}\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ が存在して $\mathcal{L}_1$ と $\mathcal{L}_2$ は $\mathbb{U}$ によって互いに移り合う．

$$\mathbb{U}\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2.$$

さらに高種数 Gromov–Witten 理論どうしはこの $\mathbb{U}$ を量子化した作用素 $\widehat{\mathbb{U}}$ で関係すると予想される．

参考文献と注

1) ひもの状態空間は M のループ空間上の「半無限」微分形式のなす空間であるとされる．真空状態を $|0\rangle$ と書くとき，状態空間に作用する作用素 O_v と状態 $|v\rangle$ とを関係 $|v\rangle = O_v|0\rangle$ によって同一視することができる．このことと作用素の合成から状態空間に積が定義される．Cumrun Vafa, *Topological mirrors and quantum rings*, Essays on mirror manifolds, 96–119, Int. Press, Hong Kong, 1992 参照．

2) ただし，サイクルたちは「ホモローグ」と呼ばれる同値関係で同一視する必要がある．ここで k 次元のサイクル C_1, C_2 がホモローグであるとは，ある $k+1$ 次元のチェイン C があってその境界 ∂C が C_1 と C_2 の差 $\partial C = C_1 - C_2$ となることである．以下では「一般の位置」にあるサイクルを考えるが，これは暗黙のうちに与えられたサイクルを摂動してそれとホモローグなサイクルに取り換えるという作業をしている．

3) $\alpha \in H^k(M)$, $\beta \in H^l(M)$ に対して $\alpha \cup \beta = (-1)^{kl}\beta \cup \alpha$ が成り立つこと．

4) 一般のシンプレクティック多様体上にはシンプレクティック形式と整合的な概複素構造をとることができ，それに関する擬正則写像（pseudo homolomorphic map）を考えることで Gromov–Witten 不変量および量子コホモロジーが定義される．

5) ここでは横断性を仮定し，さらにこのような正則写像のなす集合が離散集合であるとする（この集合が正の次元をもつときは Gromov–Witten 不変量は 0 と定義される）．また，「大雑把」と述べたのは古典的なカップ積の場合と違い，いくらサイクル A_1, A_2, A_3 を「一般の位置」にとったとしても横断性が満たされない可能性があるためである．このため式 (3) における定義はいつも正しいとは限らない．正確には，まず $\mathbb{CP}^1$ からの正則写像を Kontsevich による「安定写像」で置き換えてモジュライ空間をコンパクト化する．次にそのモジュライ上の仮想的基本類（virtual fundamental class）を構成して $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle_{0,3,d}$ が定義される．

6) （擬）正則写像 $f\colon \mathbb{CP}^1 \to M$ の満たす方程式は Cauchy–Riemann 方程式と呼ばれる．詳しくは赤穂まなぶ氏の論説を参照されたい．

7) ただし式 (2) に出てくる和が収束するかどうかは知られていない．多くの例で収束することが知られているが，本論説では収束を常に仮定する．

8) 4 点付き $\mathbb{CP}^1$ のモジュライ空間 $M_{0,4}$ に図 3 にあるような球面鎖を付け加えてコンパクト化したものを Deligne–Mumford コンパクト化と呼び $\overline{M}_{0,4}$ と書く（実は $\overline{M}_{0,4} \cong \mathbb{CP}^1$）．正則写像の定義域として $\mathbb{CP}^1$ の鎖を許すことにより，与えられた次数の正則写像のモジュライをコンパクト化することができ，このことを Gromov コンパクト性と呼ぶ．

9) この再帰方程式は Kontsevich による．また $\mathbb{CP}^2$ に対する WDVV 方程式は Painlevé 方程式 VI と関係している．Yuri, I. Manin *Frobenius manifolds, Quantum cohomology, and Moduli spaces*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 47. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. §0.6, §5.6 参照．

10) $\mathcal{H}$ の Lagrangian 部分空間とは Ω を制限して 0 になる部分空間のうち極大であるもの．
11) Alexander Givental, *Symplectic Geometry of Frobenius structures.* Frobenius manifolds, 91–112, Aspects Math., E36, Vieweg, Wiesbaden, 2004.
12) 任意の錘に対してその各点での接空間は錘と少なくとも直線に沿って交わることに注意しよう．ここでの Lagrangian 部分空間の族 $\{T_t\}_{t\in H^*(M)}$ は Barannikov により半無限 Hodge 構造の変動と名付けられている．
13) Tom Coates, Alexander Givental, Quantum Riemann–Roch, Lefschetz and Serre. *Ann. of Math.* (2) **165** (2007), no.1, 15–53.
14) Tom Coates, Hiroshi Iritani, Hsian–Hua Tseng Wall-crossings in toric Gromov–Witten theory I. Crepant examples. *Geom. Topol.* **13** (2009), no.5, 2675–2744.
15) Hiroshi Iritani, Ruan's conjecture and integral structures in quantum cohomology. To appear in *Adv. Stud. Pure Math.*

（いりたに・ひろし，京都大学大学院理学研究科）

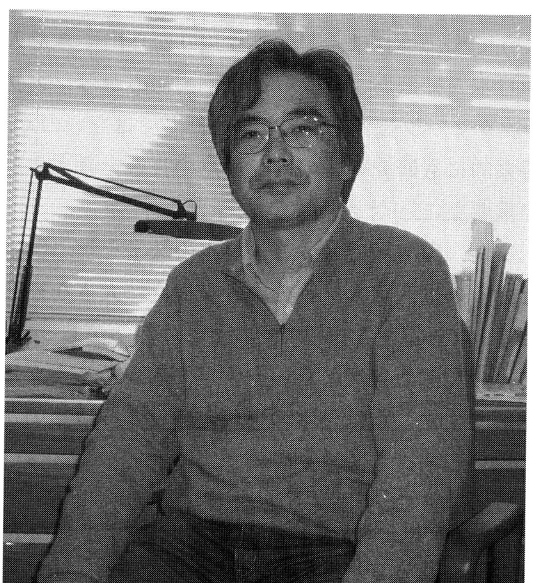
つながることで深まる幾何学と方程式の世界

太田　啓史（聞き手：編集部）

1. 特集テーマについて

——今回の特集の概観とこのテーマに関する発展状況などをご教示いただけますでしょうか．

もともと幾何学には，今回の特集で取り上げたもの以外にも大事な方程式はたくさんあって，例えばアインシュタイン方程式や最近流行のリッチ・フローの方程式，ヤン・バクスター方程式など，物理以外にも生物に関係した方程式などいろいろありますが，この特集では，結果的に主に大学1, 2年くらいで習うことが多い，物理に多少関連した方程式とその発展を取り上げることになりました．



太田啓史氏．

その中で3本柱に分けて見ることができて，まず，古典力学のハミルトン方程式から始まりシンプレクティック幾何学につながるトピックがあり，これは力学から幾何学がどんな形で発展していったかという流れになります．もう一つは，電磁気学から出てきたゲージ理論という流れです．電磁気学についての話は直接には取り上げておりませんが，そこから発展したゲージ理論と幾何学の関係について重要なトピックがあります．もう一つが，学部の2年くらいで習う関数論から出てくるコーシー・リーマンの方程式で，これは複素関数にまつわる幾何学のトピックになります．この話は非常に豊かな数学が展開されていく面白い所です．

こうした3本柱の輪郭があるわけですが，これらのことは学部時代では皆バラバラに習っていきます．しかし，先のほうにいくと実はつながっているということが，だんだんに分かってくると思います．例えば，解析力学から出てきたシンプレクティック幾何学と複素幾何学とが対応するミラー対称性というものは，一方では力学的な話で，一方では複素幾何学的な話になるのですが，不思議なことにこれらの話がマッチするというストーリーになってきます．こうしたことが結びついて，ど

んどん理論が昇華されていきます．

また，方程式ということに視点を絞って考えると，例えばコーシー・リーマンの方程式にしてもハミルトンの方程式にしても，ある種場の方程式というべき，何か関数や写像が満たす方程式を考えるのが普通ですが，そこからは通常，解として不変量などが導出され，まさに方程式と幾何学の接点の典型的な例となります．ところが，そこからさらに，そうやって出てきた不変量が満たす方程式という話がもう一段上にはあるんですね．もともと何か関数などが満たす方程式があって，その解を考えて，幾何学を見ていくというのが普通の発想で第一段階なわけですが，今度はそこから出てきた解を使って，さらにそれらが満たす方程式を考える，というステップがあるわけです．今回の特集で言うと，WDVV（Witten–Dijkgraaf–Verlinde–Verlinde）方程式などがまさにそうで，これはシンプレクティック幾何学や可積分系と関係しますが，他にも，特集では取り上げていませんが，ゲージ理論から出てくる例もあります．

そう考えていくと，お互い高みに上がった方程式どうしが，何か横でつながっていくという広がりが見えてきて，方程式というものが，プリミティブな所から非常に昇華されたものが満たす形まで見えてきて，それまで全然つながりがなかったような所にまで話がつながっていきます．つまり，“方程式の（解が満たす別の）方程式” というような流れが出てくることで，そういうことを考えていけばいくほど，無関係だったことがつながって，より大きな広がりが見えてくる，という面白さがあります．

2. 海外との比較

――今ご教示いただいた特集の3本柱に関する話や，その基礎になる学問を学ぶ体系というのは，日本と海外で違いがあるのでしょうか．

まず，今回の特集で取り上げたような発展的な話は，日本では当然学部で習うものではありませんし，定番で必ず習う必須コースでもありません．海外でもこの状況は同様だと思います．

しかし，学部での授業体系にはやや違いがあるようです．例えば，日本では，解析力学にせよ電磁気学にせよ，学部の 1, 2 年くらいで習うのでしょうが，そこでハミルトン形式とかラグランジュ形式，最小作用の原理といった基本を学びます．電磁気学も同じですが，これは物理学科に限った話で，数学科ではこうした内容が選択制になっていることが多いと思います．ところが，ロシアなどでは，こういった解析力学の授業は普通に数学科の必修の授業としてあるらしく，これはいいことだと思うんですね．数学だけでなく，源泉となる物理の基本的な話から学んで，オリジンからちゃんと触れていって，そういう知識を当り前のように共通の素養として持っているわけです．ヨーロッパの一部でも同様で，シンプレクティック幾何学をやっている人でも，スイス辺りから出てきた人は，力学のハミルトン系からスタートしていて土壌がしっかりしている人が見受けられます．根っこをもっているといいますか，具体的な現象からスタートして考えていくような教育を受けているようです．これは，アメリカ辺りから出てきた人や日本人にはあまりないようで，初めからシンプレクティック幾何あり，という感じではないので，将来的にも研究の幅の広さや息の長さを考える上で重要なことだと思います．

また，環境面でいうと，日本の数学を学ぶ環境というのは，アメリカのような極度に大きな社会と違って，適度な規模でそれぞれの数学があって，他との交流も自然に行いやすい傾向があるように感じます．これは日本の環境面の良さではないかと思います．

3. 幾何学とは何か

――一口に幾何学といっても，物理を起源として

発展してきた例も多くあるようですが，そうしますと，幾何学とはどういう捉え方で見ていくとよいでしょうか．

割に幾何学は“何でもあり”という感じがあって，解析が入ったり代数が入ったり，空間を理解するために使えるものは何でも使いますし，必要とあらばどんどん開拓していくので，節操がないと言いますか，そういう所が私は逆に魅力だと思うんですね．一途な性格というより，貪欲に何でも取り入れていく所ですね．

究極の目標は，空間なりそれに付随するものなりを理解したいというのが人類共通の願いのようなものでしょうし，そのためには，微分方程式や代数方程式など必要ならば積極的に取り入れていくわけです．幾何学にはそういった柔軟さがあると思いますし，むしろそういうものがあったほうが幾何学は広がっていくと私は思います．譬えて言うと，反則はないかもしれないけれど総合格闘技のようなものでしょうか（笑）．そういう，割に横断的な感じのするところが私にとって魅力ですね．広がりといっても，単に横に広がるだけでなく広がることで同時に深まるということが大切なのだと思います．

4. 影響を受けたこと

——先生が研究者になるに当たって影響を受けたことをお聞かせいただけますでしょうか．

私の場合，周りに非常によい先輩・同輩・後輩がたくさんいたことが良かったですね．サークルや自主ゼミで知り合った人たちとは未だにつながりのある人もいますし，そういう中で議論を闘わしたり，いろんなことを聞いたり話したりできたことは良い環境でした．それはあまり大きくもなく小さくもなく，適度な規模であったので，分野が違っていてもお互いある程度知っていますので，毎日数学の話をしなくても，雑談などをしていく中で他の分野のことも聞くことができて素養になっていたと思います．

こういうことは，先ほども海外との比較で話しましたが，昔の日本のすごく良い所だったと今になって思うんですね．分野の垣根を越えて，適度なスケールで接し合っているというのは，他のことを知るのにはお互い刺激がちょうどいい具合で非常によかったです．お互いに与えたり，与えられたりしていたわけで，これが非常に大きな集団になると，ちょっと疎遠になっていきますし，小さすぎると非常に特殊な人たちとのつきあいしかなくなりますから，適度なスケールがちょうど良かったんだと思いますね．日本の数学を学ぶ環境の良い面だと思います．

そういう点で，私は，特定の人から強烈な影響を受けたというよりは周りの人たちから自然に影響を受けたと思っています．日常的に自然な形で，そういう環境が周りにあったのが良かったのだと思います．

5. メッセージ，学ぶ上での心がけ

——これから研究者を目指す方や学生さんに，学んでいく上での心がけやメッセージなどをお聞かせいただけますでしょうか．

最初に話しましたが，今回の特集は大きくみて3本柱があって，それぞれに趣味・趣向が違いますから，これらを全部やっている人というのはそうはいないんですね．ですので，一つの視点から他のものを見る，ということを行っていくことになりますから，自分にあった趣向を見つけてそれを学んでいけば，それがだんだん発展していくと，「そっちから見ると別の世界はこういうふうに見えるんだな」と少しずつ分かってくると思います．何か学ぶためのポイントがあるというよりも，柔軟な姿勢で自分にあった考え方で進めていくことのほうが大事だと私は思いますね．

いずれにしても，何でこういうことを考えたのか，という動機を知っているとよいと思います．

いきなりコーシー・リーマンの方程式やらシンプレクティック幾何などを学んで，味も素っ気もないものになってはいけないので，例えば，シンプレクティック幾何であれば解析力学が源泉にあって，それが現象を記述するものとして順番にスタートしていって…，というように，すべてを知る必要はないですが，そういうことを少しでも知っておくと，数学をやっていく上では実体がわかるというか実感がわくと思いますね．さらに欲を言えば，その先にいくとどういうことがあるのかということを少しでも知っていると尚更いいですよね．いきなり定義から始めても分からないでしょうから，オリジンから入っていけるとより理解しやすいのではないでしょうか．

また，私の場合で言えば，学部の 2, 3 年生でこういうことを研究するなんてことは到底思ってもいなかったことですから，何がどう役に立つか，どう興味をもっていくかということは分からないですよね．

それと，学生のときに何か学んだことや聞いたこと，本で読んだことでもいいんですが，“分かるまで自分で考え抜く”という体験を若いうちにしておくといいですね．自分で本当に納得して分かったという経験をすることは，した人としていない人では明らかに違うと思いますので，分からないと思うことがあったら，一つでも徹底的に隅から隅まで分かるというぐらいまで理解していくという作業をしておくと，そういう感覚が身に付いていって後々に良いと思います．こういう体験は，研究者にはもちろん必要ですが，そうでない人にも，いい加減にしないでほしい姿勢だと思います．

“真摯にやる”ということは大事ですね．言っていることはすごいけれど，やっていることは大したことがないということも多々ありますので，数学に限ったことでもないでしょうけれど，とくに数学で向き合う対象に対しては，真摯な態度で向き合っていかなくては長続きしないと思います．

研究者を目指す人というのは，将来こういうテーマを考えてみたいというような夢だけでも困ります．やはり，夢を持ちながら足腰を鍛えることも大事です．片方だけではよくないです．夢も足腰を鍛えることも，両方忘れずにやる必要があります．夢というのは，話を聞いていると面白そうだけれど，いざ詰めようとするとできなかったり，しかし数学という世界は詰めていかなければいけませんから，そういう作業は非常に大切です．逆にそのような過程の中で，初めは全く見えていなかった新しい発見が得られることもあります．このような地道な作業を放ったらかしにしていると，例えば論文が書けなくなってしまって，構想だけ話している分には面白いのだけれども実際に取り組まなかったり，ものにならなくなってしまいます．こういうケースは，非常によくできると思われている人に，意外とそういう危険性があったりするようで，やはり真摯に向き合っていき，研究者として論文を出すという努力もして，独りよがりの道から脱却するというプロセスも経ていかないとまとまっていきません．一方で遠くをみて夢をもつことも大いに大切なのですが．

——先ほど，幾何学は節操がないことが魅力だとおっしゃっていましたが，そういった意味では視野を広くもつことも大切ですね．

もちろんそうだと思います．今回の特集でもそうなんですが，初めはそれぞれの記事が関係し合っているとは思えないわけです．ところが，やっているうちにだんだんと，「どこかで聞いたことと似ているな」となってくるわけです．ですので，視野というのは初めから広く持とうとすると，何となく薄っぺらくなってしまいますから，わざわざ目配せする必要はないと思いますが，興味とか好奇心を狭める必要はありません．しかし，視野を広げなければならないと言って，初めからあれもこれもとやるのもどうかと思います．一つ自分の興味のあることがあれば，それを柱にして他の所を柔軟に好奇心をもって見ていくだけでも，視野と

いうのはその近傍で十分に広がっていきますよね．そして，一つでも別なところで何かつながったりすると，それがスパークして飛躍的にその人の見方が広がることが多々あるわけで，それはその人が一つ何か興味をもっていたからこそ広がったわけですよね．それが単に目配せだけしているのでは，そういう理解にはいかないと思うんですね．

最初に話した“方程式の方程式”のように，上の上の段階にいって初めて別の世界とのつながりができるということもあるので，やはりそれなりに集中して何かを突き詰めていって見えてくる話だと思います．それは狭めているのではなく，結果的に世界を広げて，視野を広げていることになるわけです．視野が広いというのはいわば，「人類愛」みたいな誰しもが異論を挟まないスローガンのようなものですが，間違うとあまり効果がなく良くないことになってしまいます．なんでもかんでも万能で学ばなければいけないというのは，視野が広いという意味ではないと思います．

——本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

(2009 年 12 月，

名古屋大学東山キャンパス研究室にて)

（おおた・ひろし，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）



量子コンピュータの基礎 [第2版]

Lectures on Quantum Computation

細谷暁夫著，B5 判，160 頁，本体 1876 円，サイエンス社

現代では，研究の進展が専門分野の細分化をもたらし，科学全体を捉えることが困難な時代となった．細分化された科学研究を感じれば感じるほど，世の中を変える新技術がそれだけで創成されていくとも思えなくなる．大学生・大学院生が科学研究で夢見る夢の大きさにも，切り刻まれた影響があるかもしれない．新しい科学・技術は，新しい発想によってもたらされ，それは細分化とは対極の種々の研究者の出会いによって生み出されるというのは，幻想だろうか．否，21 世紀初頭という時代においても，それは現実に起こり，それがまさしくここで紹介する本の量子コンピュータの研究で体現されている．

本書の書き出しには，「量子計算機は，量子力学の基本原理に基づくまったく新しい計算機のコンセプトである.」とある．この一文で，大学で学ぶ物理学の代表的なものである量子力学と，計算機とは何かという情報科学とを知っていることが必要であるかのように最初は思えるかもしれない．だが本書は，百数十ページの明快な記述によって，この魅力的な新しい分野を知るための基礎を把握させ，かつそのまったく新しいコンピュータとは何かを理解させる．これが可能になっている理由の 1 つは，この書き出しに記されている著者の量子計算に対する取組みの究極の動機から，本書が書かれているということだと思われる．専門の量子宇宙論研究の立場から，「量子計算は量子力学の基本部分を，透明な論理でもっとも単純な形であたえたものであると言うことができる.」という観点に立って，物事の本質を見ようとすることからだと．ぜひとも物理学なり情報科学なりそういう分野の縦割りにとらわれない自由な発想と新しいものに興味を持つ読者に読んでいただきたい本である．

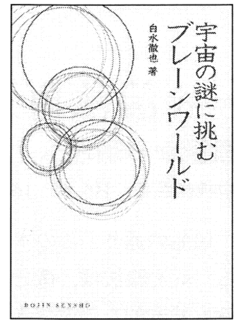
内容を大まかに説明すると，第 1 章は「**量子計算とは何か**」という大テーマから始まり，そのまま本書前半では計算機としての基礎とその物理実現に関する各章が続き，第 6 章の「**量子計算機はなぜ速いか**」から代表的な量子計算のアルゴリズムの解説がなされ，第 12 章の計算の複雑さという深い情報数理に触れ，第 13 章の量子誤り訂正という量子コンピュータ実現の鍵となる情報処理方式の基礎にまで至っている．第 2 版では新たに第 14 章で「**一方向量子計算**」として，もつれた量子クラスター状態から始めて測定を用いて計算していく第 1 版以降に物理実現を目指して提案された新方式が追加説明されている．全体の縦糸としては「計算とは何か」,「計算機はなぜ速いか」というコンピュータの側からの問題意識で進みながら，横糸として量子力学の基礎とその計算という物理操作を通した具体的理解とか深まっていき，最終的に最先端の現代コンピュータの方式からは夢想もしない量子コンピュータという名の物理計算機の実現までが語られている．

大学理系学部レベルの知識があれば，本書のかなりの部分は理解できると思われる．一方，さらに知識を持った大学院生そして研究者にとっても本書は非常に面白く読むことができ，触発を受けることだろう．これはひとえに著者の量子計算に取り組む上での筋の良い立場に所以するものと思われる．そして，実は最先端の量子計算の分野では，その幅広さと新規さゆえ，世界で誰一人としてすべてをわかっている人などいないとも言えるからかもしれない．浅学な評者の経験など小さなものであるが，計算とは何か，計算方式のアルゴリズムとは何かを研究してきた者として，自分が研究者として積んできた何年もの経験ののちに新たに多くの勉強に楽しく取り組むことができ，コンピュータの物理実現のレベルで自らが考えることができるとは想像だにしなかった．翻って，1950 年頃のコンピュータ発明時代の研究者はこういう楽しみを享受していたのだと理解し，それを現代に満喫できる幸せをかみしめることになる．このような分野の解説を行うというのは非常に大きな勇気と力が必要である．これら持ち合わせる著者をもった幸運を，ぜひ本書を読むことによって感じとって，この分野に進んでいただきたい．

今井　浩（東京大学大学院情報理工学系研究科）

宇宙の謎に挑む
ブレーンワールド

白水徹也著，B6 判，184 頁，本体 1400 円，化学同人



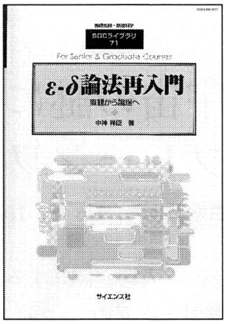
我々人間が認知する空間 3 次元のこの宇宙が，もし空間 4 次元の “宇宙” の一部だとしたら，我々の宇宙は，“宇宙” の中であたかも膜（ブレーン）のように存在しているということになるであろう．

本書は，ブレーンワールドと呼ばれる新しい宇宙像が，ダークエネルギーやブラックホールに代表される宇宙の謎を解き明かす，これまでにない新たな可能性になり得ることを，できる限り平易に解説した一般向けの著書である．具体的な各章の内容については後述するとして，本書全体からは何かしらの熱いものが伝わってくる．その原因の一つとして，本書の大きな特徴の一つでもあるが，ブレーンワールド研究の最前線で活躍する日本人研究者が数多く紹介されていることが挙げられる．本書を読んだ若い読者が強い感銘を受け，この分野に進むことがあれば，ここに出てくる研究者と共同研究することも夢ではないだろう．また内容の記述についても終始，雑になることはない．物理にあまり馴染のない読者でも，スムーズにブレーン宇宙論に入っていけるように，基本的な事柄をきちんと抑えながら段階を追って説明がなされている．またアドバンストな読者に対しても，退屈することのないように，本編の内容に少し踏み込んだ補足説明的なコラムが随所に配置されていたり，ときには物理を志す者へのアドバイスや教訓的なものが挿入されていたりもする．このように読者の意気を高揚させ，さらに幅広い読者に対応できるように配慮された本書は，啓蒙的な科学書としては十分に目的が達成された一冊と言える．時折，著者が正確に伝えたいという熱意によって，逆に読者にとっては難解と思わせてしまう箇所が無きにしも非ずであるが，自らのレベルに応じて雰囲気で読むべきところとそうでないところを読み分けるように努めれば，途中で路頭に迷うことなく，最後まで楽しく読み通すことができるようになっている．

内容について具体的にコメントしていこう．まず第 1 章では，現在の観測事実から宇宙が膨張していることや宇宙を構成している物質のことなど，いわゆる標準宇宙論について丁寧に解説されており，同時に内在するダークエネルギーなどの宇宙論的な大きな問題についても言及されている．またこの章の最後には，少々せっかちな読者に向けて，「膜宇宙論ダイジェスト」と称した，本書全体のダイジェスト版が挿入されている．第 2 章では，重力と電磁気力の理論を統一するために余剰次元の存在が示唆されることや，超弦理論において物質の基本単位として扱われるひもの停留場所として “膜（ブレーン）” の存在が指摘されることなどについて，図を用いて解説されている．この章で読者は，ブレーンワールドという常識とは懸け離れた宇宙像を受け入れるための準備をすることができるであろう．第 3 章では，ブレーンワールドという新しい宇宙像が，高次元ブラックホールや素粒子理論における階層性問題に対して，これまでにない新しい解釈を与えることについて紹介されている．またブレーンワールド研究に火をつけたランドールとサンドラムによるブレーンモデルについて，そのエッセンスが丁寧に解説されている．第 4 章では，著者が導いたブレーン宇宙上の重力方程式をもちいて，ブレーン宇宙でしか説明し得ない現象が紹介されている．本格的な相対論研究者である著者の色合いが最も出ている章と言える．この章にきて，読者に求める物理の知識量が一気に加速するが，たとえ細部が理解できなくとも，十分に雰囲気は感じとることができるであろう．そして第 5 章では，AdS/CFT 対応に代表される超弦理論のホログラフィー的性質の可能性について，身近な例を挙げた平易な解説があり，ブレーンワールド研究の最近の進展や著者が考える今後の展開が述べられ，本書が締めくくられる．

最後に印象に残った箇所を抜粋して本書評を閉じることにする．著者は，現代のダークエネルギーの問題を 20 世紀初頭のエーテルの問題にたとえ，「時空の理論の革命前夜と考えてよいほどの緊迫した状況に我々はいる」と言い，「20 世紀に相対性理論が登場した状況と現在置かれている状況は酷似している」と述べている．これらの文章を読んだとき，当時高校生だった私が NHK で放送されていたアインシュタインロマンを見て異常に興奮した，まさにあのときと同じ感覚になった．是非一読してもらいたい良著である．

姫本 宣朗（日本大学生産工学部）



ε–δ 論法再入門

直観から論理へ

中神祥臣著，B5 判，168 頁，本体 1857 円，サイエンス社

題名の通り，この本は ε–δ 論法への「再」入門である．ε–δ 論法は，微分積分学を現代的に展開する際の最も基本的な論法であり，伝統的に大学の理工系課程の第 1 学年で教えていたが，近年では，わかりにくい，実用的でないなどの批判を受け，教えない，選択に回す，もっと後の学年に回すなどの対応が多くの大学で取られている．東大でもかつては理系のすべての学生に対し，第 1 学年の必修講義の中で教えていたが，今では理学部・工学部に進学するコースでの選択必修科目として教えている．

微分積分学を全く学んだことがなくてこの本を手に取る人はいないと思うが，ε–δ 論法については，ちゃんと習わなかった，習ったがよくわからなかった，忘れてしまった，などの理由により，きちんと身についていないが，後になって必要性を実感して，もっと深く理解したいということはよくあるケースであろう．また大学初年級で，ε–δ 論法を初めて学ぶ際にも，通常の微分積分学の本や講義の中での短い説明ではなかなか理解できないということもよくあると思う．この本は，この論法をきちんと理解するということに焦点を絞った特色ある本である．

極限操作は論理的になかなか微妙な問題を含んでおり，深く考え始めると何かだまされているような気がしてくる「証明」も少なくない．また，いい加減な直感に頼っているとすぐに間違った結論に導かれてしまう．ε–δ 論法はこのような問題点を解決する方法として，長い歴史の間に確立された強力な方法であり，数学理論において大変有用なものなのだが，学び初めの段階で，なぜこんな回りくどいことをしなくてはいけないのかわからない，という印象を持たれやすい．

数学における証明というものには，誰でもある程度の経験があるが，通常は，あまり明らかでないものをより基本的なことに帰着するものである．しかし厳密な微分積分学に初めて触れると，何が「より基本的なこと」なのか，直感的にあまり明らかでない．例えば，本書系 6.10 にある，「微分して定数 0 になれば，元は定数関数」という事実は誰でも知っており，普通は「接線がまっ平らなのだから定数関数になる」と理解している．数学的な証明は，本書にもある通り，平均値の定理に帰着させるもので，その平均値の定理は最大値の定理から導かれる．最大値の定理は，コンパクト性と連続性に基づく基本的な定理であり，もっと先まで学べばその重要性は明らかでもあり，このような理論的証明法は全く正当なものだが，初めて学ぶ人にとっては，このようなやり方の意義がすぐにはわからない．何だか明らかなことを，わざわざ回りくどくしているだけのように感じられるわけである．

そこで本書では，多くの例を挙げ，基礎からゆっくり話を進めている．このような本を書こうとすると，話をどこから始めるか，実数の連続性について何を認め，どのように説明するか，記号論理についてどのように説明するか，といったことについて深く考える必要があるが，本書では長年の経験に基づいた，ていねいな説明が与えられている．

まず，最初は ε–δ 論法に基づく数列の極限の定義であり，その意味の説明，使い方などが続く．この第 1 章の後，実数論が始まる．実数の連続性の公理には，「単調減少する閉区間の列の共通部分は空ではない」を採用している．ここから，上・下限，上・下極限，コーシー列などが説明されていく．ここまででも命題論理は実質的に使っているわけだが，この後初めて一章取って，命題論理が詳しく説明される．この配列は教育的配慮によるものであろう．私も何度か微分積分学を教えたことがあるが，学生が命題論理に慣れるにはかなりの時間と手間が必要なものである．命題の否定を取るのは，何も考えなくても機械的にできるわけだが，東大でもいくら言ってもなかなかできるようにならない学生がかなりいる．ここまでで全体の 3 割ほどのページ数を費やすていねいなペースで，この後，関数の連続性に入り，通常の一変数の微分積分学が展開される（偏微分や重積分は本書の対象外である）．また，有界関数のリーマン積分可能性に関するルベーグの定理など，あまり初年次には学ばない話題も入っている．

演習問題の解答もすべてついており，本書は厳密な微分積分学をきちんと学びたいという強い需要に応える大変有益な本であると言える．

河東 泰之（東京大学大学院数理科学研究科）

リレー連載

現象から方程式を創り出す

第5回 —立式で鍛える論理的思考法—

ケルマック・マッケンドリック方程式

感染症流行の個体群ダイナミクス

稲葉 寿

1. はじめに

西欧中世世界のペスト流行による変容や，新大陸文明の外来感染症による崩壊等の歴史上の例に見られるように，感染症流行は人類社会にとって極めて大きな影響を持ってきた．20世紀以降の医学の大きな進歩にも関わらず，感染症が人類の健康に対する最大の脅威であるという事情は基本的には現代でも変わらない．ここ数年，世界的に警戒されていた高病原性鳥インフルエンザ（H5N1）への関心は，皮肉にも突如として発生した新型（豚）インフルエンザ（H1N1）の世界的流行によって後景に退いたようであるが，いずれにせよ1980年代に始まったエイズパンデミック，1990年代のBSE（牛海綿状脳症），vCJD（変異性クロイツフェルト・ヤコブ病），2002年に発生したSARS（重症急性呼吸器症候群）などに見られるように，21世紀に入って人類社会がその接触頻度を増して全地球的にますます一体化するとともに，感染症の世界的流行リスクは再び急激に高まってきている．

感染症の流行を数理モデルで研究しようという端緒も古く，すでに18世紀の数学者ダニエル・ベルヌーイ（Daniel Bernoulli）は，天然痘死亡率の寿命への影響に関する研究を行っている．しかし現在の感染症数理モデルの原型は，ケルマックとマッケンドリック（Kermack and McKendrick）による1920年代から30年代にかけての一連の業績（微分方程式モデルの開発）によって与えられたと考えられ，その影響は決定的なものであった[1,14~16]．しかも80年を経ても，彼らの研究や課題は完全に理解されているとも言い難い．本稿では，ケルマック・マッケンドリックによる感染症流行の方程式をとりあげて，その導き方や，基本となる概念を紹介することにしたい．

2. ケルマック・マッケンドリック方程式：前期モデル

感染症流行の問題は，ホスト個体群（人口）のレベルで考えれば，感染した個体がどのように増殖して，最終的にどれくらいの割合の個体が感染を経験するか，定常的あるいは周期的な流行は起きるか否か，流行を防ぐ介入（ワクチン接種，隔離など）はどのように設計されるべきか，というような個体群ダイナミクス（Population Dynamics）の問題に他ならない．一方，個体のレベルで感染過程をみると，あるときまで未感染で感受性の状態にいた個体が，ある確率で感染状態に移行し，その後病態の進展とともに回復するか死亡するか，という状態遷移として表現できる．そこで，ホスト

の人口（個体群）を**感受性状態**（susceptible），**感染性状態**（infective），**回復状態**（recovered）の3つの状態に分類しよう．病態や状況に応じてさらに細かく個体群の状態を分割して考えることが実践的で，有効であるが，ここでは最も基本的な分類だけを考える．このとき，感染性状態は感染因子に感染して，なおかつそれを（感受性状態の個体に）感染させる能力がある状態を意味する．また回復状態は症状から回復して免疫を得た健康状態であるか，あるいは隔離や死亡によって感染過程から除去された状態を示しているとしよう．

いまホスト個体群は，連続変数で表現されるのに適当なほど大きなサイズであると仮定する．はじめは，考えている個体群の人口学的変動（出生，死亡，移民など）は考慮しないとしよう．感染流行の期間が短く，週や月が単位になるような場合はこの仮定は妥当である．ただし人口移動は通勤通学や旅行などのように，同じような短いタイムスケールを持ち得るから，流行の行方に大きな影響があるが，ここではまず閉鎖集団における流行のみを考える．

単位時間あたり単位人口あたりに感受性ホストが感染する率を**感染力**（force of infection）と呼び，$\lambda(t)$ と表す．ここで t は時間である．感受性状態の個体群サイズを $S(t)$ とすれば，定義から，

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\lambda(t)S(t) \tag{1}$$

となる．

感染力 $\lambda(t)$ がホスト個体群サイズからどのように内生的に決定されるか，という点は感染症流行モデルを定式化する場合の最も重要なポイントである．ここで考えているホスト個体群は，感染因子伝達可能性のある一定の領域に存在する個体群を指しているから，そのサイズは単位面積あたりの個体数，すなわち局所的な個体群密度を含意している．

サイズ N の感受性個体が考えている領域において他個体と単位時間に接触する頻度を $C(N)$，感染性個体群のサイズを I とすると，接触した相手が感染者である確率は I/N であり，一回の接触で感染が成立する確率を ϕ（これは定数と仮定する）とすれば，一般に感受性人口が受ける感染力は

$$\lambda(t) = C(N(t))\frac{I(t)}{N(t)}\phi$$

となる．

よく知られた**質量作用の法則**（the law of mass action）においては，面積 A に存在する2種類の個体群の個体数を N_1, N_2 とすると，ランダムな相互作用による単位面積あたりの接触頻度は，その密度の積 $(N_1/A)(N_2/A)$ に比例すると想定される．したがって領域 A での単位時間の相互作用総発生数は $(N_1/A)(N_2/A)A = N_1N_2/A$ に比例する．そこで，個体行動の異質性などを捨象してランダムな接触を考える場合，1個体にとっては他者との単位時間あたりの接触頻度は，全個体数を N とすれば，その密度 N/A に比例する，すなわち比例定数を $k > 0$ とすれば，$C(N) = kN/A$ であると想定できる．このとき，$\lambda(t) = (k\phi/A)I(t) = \beta I(t)$，$\beta = k\phi/A$ は定数（**伝達係数**：transmission coefficient）となるから，感染人口密度に比例する感染力が得られる．これが本来のケルマック・マッケンドリックの仮定である．

しかしより一般に，物理的な接触可能な範囲は個体群サイズに依存して可変的であり得るし，エイズ等の性的感染症の感染経路である性的接触においては物理的空間ではなく，社会的な交際範囲が問題である．しかも十分に高密度であれば，物理的接触頻度は接触に費やされる時間を考えると飽和するであろうし，性的接触などではより早く飽和すると考えられる．また個体間距離が一定に保たれていて，生息範囲が個体数に比例して変化するような生物個体群では接触密度は個体数に関わらずに一定で $C(N)$ は定数とみなせる場合もある．そうしたときは，$\lambda \propto I/N$ となる．このタイプの感染力は**標準発生率**（standard incidence），あるいはMacdonald型などと呼ばれることもある．N が時間的に不変であれば標準発生率と質量作用型の仮定は定性的に同じモデルを導くが，サイズ N が時間的に変動する場合はモデルは質的

に異なったものとなる．一般に広いレンジの個体数密度 N に関しては，$C(N)$ は N について単調増大で上に有界，低密度では N に比例的な関数であると仮定することが妥当であろう．Brauer[3]は一般的な接触頻度 $C(N)$ を用いたケルマック・マッケンドリックモデルを検討している．いずれにせよ，考えている感染症と状況に適切な感染力 $\lambda(t)$ を設定することが肝要である．

一方，感染性個体群サイズは年齢密度関数 $i(t,\tau)$ で表現されると考えよう．ここで τ は**感染齢**（infection age）で，個体が感染してから感染性状態において経過した時間を表す．したがって時刻 t における感染性個体群サイズは $\int_0^\infty i(t,\tau)d\tau$ である．感染齢は，感染者の病態の進行状況を記述するために非常に重要なパラメータである．実際，HIV感染のように，感染性期間が長大である場合，その感染力は感染齢によって大きく異なると考えられている．

いま感染齢 τ における回復率（単位時間あたり単位個体あたりの推移強度）を $\gamma(\tau)$ とすれば，感染齢 τ において回復する確率，あるいは感染性状態での滞在時間が τ である確率は，

$$\Gamma(\tau) = \gamma(\tau)\exp\left(-\int_0^\tau \gamma(\sigma)d\sigma\right)$$

で与えられる．感染齢依存性を無視した場合，γ は定数であるから，滞在時間分布としては必然的に指数分布を仮定することになることを注意しておこう．したがって，常微分方程式で表されるモデルでは，個体の各状態での滞在時間分布はすべて指数分布であると暗黙裏に仮定していることになる．

回復率 $\gamma(\tau)$ を用いれば，微少な時間 Δ における密度変化は

$$\begin{aligned} &i(t+\Delta,\tau+\Delta) - i(t,\tau) \\ &\quad = -\gamma(\tau)i(t,\tau)\Delta + o(\Delta) \end{aligned}$$

と表される．ここで $\Delta \to 0$ のとき $o(\Delta)/\Delta \to 0$ である．したがって，左辺のテイラー展開から感染性個体群に対する以下の方程式（**McKendrick方程式**）が得られる：

$$\frac{\partial i(t,\tau)}{\partial t} + \frac{\partial i(t,\tau)}{\partial \tau} = -\gamma(\tau)i(t,\tau). \qquad (2)$$

また $\beta(\tau)$ を感染齢に依存する伝達率を表すパラメータとして，感染個体の異質性を考慮した「質量作用の法則」タイプの感染力を

$$\lambda(t) = \int_0^\infty \beta(\tau)i(t,\tau)d\tau$$

と想定すれば，単位時間あたりの新たな感染発生数 $\lambda(t)S(t)$ は感染齢がゼロの境界に現れるから，

$$i(t,0) = S(t)\int_0^\infty \beta(\tau)i(t,\tau)d\tau \qquad (3)$$

という境界条件を得る．

感染個体は単位時間あたり $\int_0^\infty \gamma(\tau)i(t,\tau)d\tau$ だけ回復するから，$R(t)$ を回復した個体群サイズであるとすれば，

$$\frac{dR(t)}{dt} = \int_0^\infty \gamma(\tau)i(t,\tau)d\tau \qquad (4)$$

となる．(1)–(4) を**ケルマック・マッケンドリックモデル**と呼ぶ．ただし，このモデルは1927年の論文で提起されたもので，その後1930年代に後述するような別のモデルが提案されているから，ここでは**前期ケルマック・マッケンドリックモデル**と呼んでおこう．なお，このようなホスト個体群をいくつかのサブグループに分けるモデルは一般に**コンパートメントモデル**（compartment models）と呼ばれ，さらに感受性，感染性，回復・隔離の3状態に分けるモデルは**SIRモデル**（SIR models）と呼ばれる．

3. 積分方程式アプローチ

モデル (1)–(4) は非線形境界条件の微分方程式モデルであるが，意外なことにこれは単独の非線形積分方程式の問題へ還元できる．(2) を特性線にそって解けば，

$$i(t,\tau) = \begin{cases} \Gamma(\tau)i(t-\tau,0), & t-\tau>0, \\ \dfrac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(\tau-t)}i(0,\tau-t), & \tau-t>0. \end{cases}$$

そこで，この表現を λ の定義に代入して，$i(t,0) = -\dot{S}(t)$ に注意して (1) を用いれば，

$$\frac{\dot{S}(t)}{S(t)} = \int_0^t \Psi(\tau)\dot{S}(t-\tau)d\tau - G(t). \quad (5)$$

ここで $\Psi(\tau) := \beta(\tau)\Gamma(\tau)$ であり，

$$G(t) := \int_0^\infty \beta(a+t)\frac{\Gamma(a+t)}{\Gamma(a)}i(0,a)da$$

である．いま $\lambda(t) = -d\log S(t)/dt$ に着目して，累積感染力

$$\Lambda(t) := \int_0^t \lambda(\sigma)d\sigma = -\log\frac{S(t)}{S(0)}$$

を導入して，(5) を t について $[0,t]$ で積分すれば

$$-\Lambda(t) = \log\frac{S(t)}{S(0)}$$
$$= \int_0^t d\sigma \int_0^\sigma \Psi(\tau)\dot{S}(\sigma-\tau)d\tau - \int_0^t G(\sigma)d\sigma$$
$$= \int_0^t \Psi(\tau)S(0)(e^{-\Lambda(t-\tau)}-1)d\tau - \int_0^t G(\sigma)d\sigma$$

を得る．したがって $\Lambda(t)$ に関する以下のような非線形再生積分方程式にたどり着く：

$$\Lambda(t) = g(t) + \int_0^t \phi(\tau)f(\Lambda(t-\tau))d\tau \quad (6)$$
$$g(t) := \int_0^t G(\sigma)d\sigma, \quad \phi(\tau) := \frac{\Psi(\tau)}{\int_0^\infty \Psi(\tau)d\tau}$$
$$f(x) := R_0(1-e^{-x}).$$

ただしここで

$$R_0 = S(0)\int_0^\infty \Psi(\tau)d\tau$$

である．

(6) から Λ が決定されれば $S(t)$ が得られ，$i(t,\tau)$ は (2)–(3) から非自律的な線形問題の解として得られる．$R(t)$ は (4) から決定される．したがって，前期ケルマック・マッケンドリック方程式の本質的な部分は単独の非線形ヴォルテラ型積分方程式 (6) によって表現されていると考えられる．

パラメータ R_0 は，感染症数理モデルを解析する際にキーとなる指標であって，**基本再生産数** (basic reproduction number) と呼ばれる[6,7]．R_0 は全体が感受性である個体群に少数の感染個体が発生した場合に一感染個体がその全感染性期間に再生産する二次感染者の平均数に他ならない．R_0 が 1 を超えると，流行規模は急激に増大するという**閾値現象** (Threshold Phenomena) が起きることが示される．

初期感受性人口の中で時刻 t までに罹患した人の割合を

$$p(t) := 1 - \frac{S(t)}{S(0)}$$

とすれば，(6) は

$$-\log(1-p(t)) = g(t) + R_0\int_0^t \phi(\tau)p(t-\tau)d\tau$$

という形の積分方程式に書き換えられる．ここで $t \to \infty$ とすれば，**最終規模** (final size) $p(\infty)$ が満たすべき方程式

$$-\log(1-p(\infty)) = R_0(\infty)$$

が得られる．

上記の設定から明らかなように，前期ケルマック・マッケンドリックモデルは閉鎖個体群における一回の流行を記述する方程式であり，感染性個体群サイズは侵入に成功していったん増加しても，感受性個体群の減少によって減少に転じ，終局的には消滅する．これは感受性個体群を資源，感染性個体群を消費者とする**消費者・資源モデル** (consumer–resource model) と考えれば理解しやすいであろう．

前期ケルマック・マッケンドリックモデルは，パラメータ γ, β を定数と仮定して感染齢依存性を無視すれば，常微分方程式に還元され，ケルマック・マッケンドリックはその近似方程式に対する解析解を与えた．その大域的性質は 1950 年代に Kendall[12] によって詳しく再検討され，さらに空間分布をもつモデルへ拡張された[13]．Kendall の解析は佐藤[20]に解説されている．一方，感染齢依存モデルの厳密な解析は非常に遅れて 1970 年代に入ってから，Metz[17] や Diekmann[4,5] 等によって果たされた[18]．感染齢依存的でかつ空間分布を考慮したモデルは Rass and Radcliff[19] において詳しく解析されている．

4. ケルマック・マッケンドリック方程式：後期モデル

前期モデルの仮定と異なり，外部からの移民や出生によって感受性個体が補充される場合は，一定の感染個体群がホスト集団に常在する定常解が出現する．そのような状態を**エンデミック定常解**（endemic steady state）と呼ぶ．前期モデルから一転して，1930 年代の論文において，ケルマック・マッケンドリックはホスト個体群の人口学的変動を考慮した**エンデミックモデル**（endemic model）を展開した．エンデミックモデルは，何らかの感染症が風土病化して，同一ホスト集団において繰り返し流行を引き起こす状況を表現していると考えられる．原論文における彼らの定式化は複雑であるが，ここでは現代的な形で彼らのモデルを提示しよう．

前節と同様に SIR モデルを考えるが，すべてのカテゴリにおいて滞在時間を考え，$s(t,\tau)$, $i(t,\tau)$, $r(t,\tau)$ を時刻 t における滞在時間 τ における個体群密度であると仮定する．感染個体群 i の滞在時間は感染齢に他ならない．前期モデルとは異なり，後期モデルでは，回復した個体群は部分的な免疫をもつが，部分的な感受性も有するために再感染可能であると仮定され，また感受性個体 s は全く感染経験のない個体群であると想定されている．m と μ はホスト個体群の出生率，死亡率とし，$\gamma(\tau)$ は感染齢 τ における回復率，$\beta_1(\tau,\sigma)$ は感染齢 σ の感染者から持続時間 τ の感受性個体への伝達係数，$\beta_2(\tau,\sigma)$ は感染齢 σ の感染個体から持続時間 τ の回復個体への伝達係数（再感染率）とする．したがって感染力は以下のように想定される：

$$\lambda_j(t,\tau)=\int_0^\infty \beta_j(\tau,\sigma)i(t,\sigma)d\sigma.$$

ここで λ_1 は感受性個体，λ_2 は回復（部分感受性）個体に作用する感染力である．以上の条件の下で，以下のような方程式が得られる：

$$s_t(t,\tau)+s_\tau(t,\tau)=-(\mu+\lambda_1(t,\tau))s(t,\tau), \quad (7)$$
$$s(t,0)=m\int_0^\infty n(t,\tau)d\tau,$$
$$i_t(t,\tau)+i_\tau(t,\tau)=-(\mu+\gamma(\tau))i(t,\tau), \quad (8)$$
$$i(t,0)=\int_0^\infty [\lambda_1(t,\tau)s(t,\tau)+\lambda_2(t,\tau)r(t,\tau)]d\tau,$$
$$r_t(t,\tau)+r_\tau(t,\tau)=-(\mu+\lambda_2(\tau))r(t,\tau), \quad (9)$$
$$r(t,0)=\int_0^\infty \gamma(\tau)i(t,\tau)d\tau,$$

ここで

$$s_t(t,\tau)+s_\tau(t,\tau)=\frac{\partial s(t,\tau)}{\partial t}+\frac{\partial s(t,\tau)}{\partial \tau}$$

等である．また $n=s+i+r$ は全ホスト個体群の滞在時間密度関数である．

後期ケルマック・マッケンドリックモデル (7)–(9) は非線形の年齢構造化個体群モデルとして研究されており，β_j が $\beta_j^1(\tau)\beta_j^2(\sigma)$ という**分離混合**（separable mixing）タイプである場合には，R_0 が 1 を超えて増加する場合，大域的に安定な感受性個体のみからなる自明定常解（未感染状態）が前方分岐を起こして，安定なエンデミック定常解が出現することがわかっている．(7)–(9) に関しては周期解の分岐が起きるかどうかはわかっていないが，一般に年齢構造は周期解を導き得ることがわかっており，再帰的流行の要因の一つと見なされている[8,9]．

上記のような再感染モデルは，特殊なものではなく，普遍的な現象のモデル化であると考えられる．ケルマック・マッケンドリックの後期モデルは，出現してから半世紀以上も省みられることがなく，年齢構造をもつ感染症数理モデルは，もっぱら生涯免疫を誘導するような SIR 型感染症か，あるいは免疫誘導のない感染症（SIS モデル）を想定して開発されてきた．しかし，近年ではこれまで生涯免疫を誘導すると考えられていたような感染症（麻疹など）でも，免疫の賦活化がなければその効果が自然減衰すると考えられてきている．また季節性インフルエンザのように抗原性変異がウィルス側で一定の割合で常に起きていれば，過去に流行したウィルスタイプよって誘導された免疫力は，常に各時期に支配的となっているウィルスタイプに対して相対的に減衰していくことになる．実際，1980 年代に現れた抗原ドリフトによる季節

性インフルエンザの再流行モデル（Pease model）は後期ケルマック・マッケンドリックモデルの特殊ケースとみなすことができる[9,10]．

5. おわりに

ケルマック・マッケンドリックが，そのモデルの提起にあたって常に感染齢に着目して，当初から内的構造をもつ個体群の問題としてモデルを定式化したことは，きわめて先進的であり，今日においてもそのモデルを参照すべきである根拠となっている．事実，1990年代に至ってDiekmann, Heesterbeek, Metzが提起した普遍的な基本再生産数の定義は，感染齢に依存した感染個体再生産過程を基礎としたものであった[6]．またその後期モデルは，免疫効果の減衰による再感染・再流行という今日ますます重要となってきている視点を先取りしたものであり，いまなお未解明の課題を提起し続けている[11]．

参考文献

1) R.M. Anderson (1991), Discussion: The Kermack-McKendrick epidemic threshold theorem, *Bull. Math. Biol.* **53**(1/2): 3–32.
2) R.M. Anderson and R.M. May (1991), *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control*, Oxford UP, Oxford.
3) F. Brauer (2005), The Kermack and McKendrick epidemic model revisited, *Math. Biosci.* **198**: 119–131.
4) O. Diekmann (1977), Limiting behaviour in an epidemic model, *J. Nonl. Anal. Theory Meth. Appl.* **1**, 459–470.
5) O. Diekmann (1978), Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection, *J. Math. Biol.* **6**, 109–130.
6) O. Diekmann, J.A.P. Heesterbeak and J.A.J. Metz (1990), On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations, *J. Math. Biol.* **28**: 365–382.
7) O. Diekmann and J.A.P. Heesterbeek (2000), *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation*, John Wiley and Sons, Chichester.
8) H. Inaba (2001), Kermack and McKendrick revisited: The variable susceptibility model for infectious diseases, *Japan J. Indust. Appl. Math.* **18**(2): 273–292.
9) 稲葉寿 (2002a),『数理人口学』，東京大学出版会.
10) H. Inaba (2002b), Endemic threshold and stability in an evolutionary epidemic model, In *Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging Infectious Diseases*, C. Castillo-Chaves, *et al.* (ed.), The IMA Volumes in Mathematics and its Applications **126**, Springer: 337–359.
11) 稲葉寿（編著）(2008),『感染症の数理モデル』，培風館.
12) D.G. Kendall (1956), Deterministic and stochastic epidemics in closed populations, In *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, J. Neyman (ed.), Vol.IV, University of Calfornia Press: 149–165.
13) D.G. Kendall (1957), Discussion of "Measles periodicity and community size" by M.S. Bartlett, *J. Roy. Statist. Soc.* **A120**: 48–70.
14) W.O. Kermack and A.G. McKendrick (1927), Contributions to the mathematical theory of epidemics I, *Proceedings of the Royal Society* **115A**: 700–721 (reprinted in *Bulletin of Mathematical Biology* **53**(1/2): 33–55, 1991).
15) W.O. Kermack and A.G. McKendrick (1932), Contributions to the mathematical theory of epidemics II. The problem of endemicity, *Proceedings of the Royal Society* **138A**: 55–83 (reprinted in *Bulletin of Mathematical Biology* **53**(1/2): 57–87, 1991).
16) W.O. Kermack and A.G. McKendrick (1933), Contributions to the mathematical theory of epidemics III. Further studies of the problem of endemicity, *Proceedings of the Royal Society* **141A**: 94–122 (reprinted in *Bulletin of Mathematical Biology* **53**(1/2): 89–118, 1991).
17) J.A.J. Metz (1978), The epidemic in a closed population with all susceptibles equally vulnerable; some results for large susceptible populations and small initial infections, *Acta Biotheoretica* **27**(1/2): 75–123.
18) J.A.J. Metz and O. Diekmann (1986), *The Dynamics of Physiologically Structured Populations*, Lecture Notes in Biomathematics **68**, Springer-Verlag: Berlin.
19) L. Rass and J. Radcliff (2003), *Spatial Deterministic Epidemics*, American Mathematical Society.
20) 佐藤總夫 (1987),『自然の数理と社会の数理―微分方程式で解析する II』，日本評論社.
21) H.R. Thieme (2003), *Mathematics in Population Biology*, Princeton University Press, Princeton and Oxford［邦訳 ホルスト・R・ティーメ著『生物集団の数学（上）（下）人口学，生態学，疫学へのアプローチ』日本評論社 2006, 2008］.

（いなば・ひさし，東京大学大学院数理科学研究科）



ただただ数学を眺めて

宮本 雅彦

1. ぼうっと，数学を考える

教員の立場で，「研究者の道とは何か？」と聞かれたら，啓蒙的な意見を述べたいと考えてしまうので，自分の歩んできた道を紹介するのは不適切ではないかと危惧する．ただただ助けられてきたような道だからだ．数学という学問の持つ懐の深さに免じて許してもらうことにしよう．

どうして数学者になったのだろう．なりたいと考えたことがあっただろうか．子供のときの夢は科学者だった．数学者も科学者の一員だが，イメージはかなり違う．実技と縁を切ったのは，小学校の解剖の授業で蛙の腹をメスで切ることに失敗したときかもしれない．大学の進路を決めるときも，数学が得意だし，数学科があるという程度で理学部に進んでいる．数学科というものがどういうものかも考えなかったし，数学者という職業があることさえ知らなかった．小中高で数学はできたと思うが，授業が楽しかった記憶はない．小学校での記憶はもっと悲惨である．かなり記憶力の悪い子供で，九九を覚えるのに苦労した．「来週までに九九を覚えて先生の前で暗唱してください」と言われ，家で一生懸命暗記しようとした．しかし，小さい段は覚えられるが，大きな段は一向に覚えられない．特に，6の段と7の段は覚えられず，頭の中で足し算をしていって暗唱したふりをした．こんな調子だったので，算数の問題は解けたと思うが，算数を楽しいと感じたことはなかった．数学に興味を持つようになったのは，6年生のときに父が児童用の数学辞典を買ってくれたのがきっかけである．今ではその本がどんな本だったかも覚えていないが，大切に持ち歩いていたように思う．ただ，わかる記事といったら，未満と以下の違いをエジプトを舞台にして面白く書いていた程度のものだった．相変わらず記憶の悪さはひどいもので，公式などもすぐに忘れた．試験の最初の10分ぐらいは使う公式を作り出すために使っていた．嬉しいことに，数学の大半の公式はその場で作り出せるのである．だから，複素数を使えば三角関数の加法定理が出ることや，物理の Maxwell の3つの方程式が一つの式から微分で導けることに気づいたときには，覚える量が減ったと感謝した．数学が好きというより，数学に助けられていたというのが事実だろう．

小中高では，数学に理解のある先生に出会った記憶がない．高校の先生や数学の授業にはほとんど興味がなく，一時期は，数学の授業中に角の3等分問題の作図をして眺めていたりした．解けないとは聞いていたが，どうして答えがあるのに解けないものがあるのか不思議だった．直線は等分

することができるのだから，角の等分と直線の等分を対応させる図形を作れば，角の等分はできるはずと考え，その曲線を何回も詳細に作図していた．今で言えば，

$$f(t) = (1-t)\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

という曲線を書いていることになるのだろう．特に，$t \to 1$ の極限が $\frac{2}{\pi}$ となることから，円積問題とも関係していることに驚き，どうして極限が取れないのかを図形を眺めながら考えていた．時折，友達からZ会の問題を解いてくれと頼まれては，解答を作ってあげていたが，それよりも解けない問題をただただ眺めているほうが楽しかった．

2. 群論へ

北海道大学に進み，数学科に移って，数学への印象が徐々に変わってきた．特に，代数の都筑俊郎先生の講義は，定理を板書して，その場で考えながら証明していく方法だった．我々もついていける程度のスピードで証明を考え，「先生，そこの解答は間違っていませんか」と質問すると，素直に「そうだね」と言って，戻って証明を考えるような授業だった．整数論の自主ゼミに参加していたとき，当時大学院生だった林誠さんが訪ねて来られ「面白い証明があるから聞かないか」と誘ってくれた．ちょうど退屈していたこともあり，話を聞くことにした．群の2つの元の共役関係を局所的に捉えるフージョンと呼ばれる結果だった．その証明が面白かったので，都筑先生の研究室を訪ね，大学院のセミナーに出席させてほしいと頼んでみた．すると，Gorensteinの『Finite Group』という本を渡され，「これを200ページ（第一部）まで読んだら出席しても良いよ」と言ってくださった．3年生の1月のことである．一日10ページ読めば20日で終わるだろうと考えたが，専門書で，しかも僕の苦手な英語である．何も理解できない日々が続いた．そこで，苦手な英語のままで読むのを諦め，翻訳することにした．一日5ページ程度を目安に毎日訳していった．本当にただただ訳していった．自分の変化に気づいたのは100ページぐらいまで進んだときである．そのページを訳していて突然，最初の1章で翻訳していたことが頭に浮かび，どうしてそのようなことをしたのかという数学的な意味が初めて理解できたのである．そして，ページが進むにつれて徐々に理解できる部分も増え，200ページに達する頃には現在訳している場所の意味もわかるようになっていた．都筑先生が知った上で仰ったのかわからないが，本当に感謝している．

3. 挫折

大学4年生のときの北大での国際研究集会を初め，当時，有限群論は活発で，北大には鈴木通夫先生，原田耕一郎先生を初め，著名な研究者が多数来訪していた．博士課程の途中で，北大の助手に採用され，目標としていたフージョンに関するGlauberman's予想を解決し，それを博士論文として書き上げて意気揚々としていた頃，単純群の分類が完成したというニュースが入ってきた．それを境に，群論を研究している人たちの意欲が急速に失われていった．それだけ，単純群の分類という目標が大きなものだったのだろう．群論は終わったという人までおり，他の人の研究に関心のない僕にとっても，有限群そのものの研究を続けることができるような雰囲気ではなかった．僕は，大学の授業で面白いと感じていた環論的な方向に向かい，群の整数環上の表現を研究し始めた．当時，Irving Reinerの『Maximal Order』という本をGorensteinの『Finite Group』に替えて持ち歩いていた．この本は，お勧めしたい本の一つである．環論の美しさを本当に見せつけてくれる．愛媛大学に移って数年後，文部科学省の若手在外研究員の応募の話があり，整数表現の結果をいくつか発表していたので，Reiner氏の指導を受けたいと考え，Reiner氏と同じ大学の鈴木通夫先生を頼って，イリノイ大学に10カ月の滞在を申請した．採用されていた科研費との関係もあり出国できたのは10月であり，講義はすでに1カ月前に始まっていて，英語が苦手な僕には理解できなくなっていた．しかも，Reiner氏には，お会いする

こともなく，渡米して 2 週間後に葬儀に参列している．そして，彼の下に集まっていた研究者たちは皆自分の大学に戻ってしまった．それからは，鈴木先生の群論の講義以外は，図書館にいて，勉強するだけの日々で，時折，「これなら日本にいても同じだな」と虚しさを感じていた．

4. 救いの手

挫折してアメリカから戻ってきてからは，論文を少しは書いていたが，数学に熱くなることもなく，こうやって，数学に対する意欲を失っていくのだろうかと漠然と考えていた．そんな僕を見かねて，当時愛媛大学の木村浩先生が原田先生を一年間愛媛大学に招いてくださった．原田先生も僕の現状を心配してくださり，オハイオ州立大学で授業を持つという条件でアメリカに滞在する話を紹介してくれた．イリノイ大学のときは単に研究していれば良かったが，今回は，英語で授業を行うのである．自分の現状に不満を持っていたのだと思う．英語が苦手なのにも関わらず，その仕事を引き受けた．英語で授業を行うというのは，僕にとっては一大事であり，前回のときのように「どうしてここにいるんだ」というような不安を抱く暇もなかった．

秋に渡米し，秋学期は，大学院生に代数の講義を行った．本当は学部生の授業を担当するはずだったが，原田先生が気を利かせて，学部の授業と大学院の授業を交換してくださったようである．後に筑波大学に助手として採用し，現在台湾の中央研究院の教授となっている Lam Ching Hung 氏はこのときの学生である．大学院生たちは本当に数学を知りたがっており，僕のつたない英語から必死に数学を学んでいた．最後の講義の後で，学生から「宮本は間違ったことを一度も言わなかった」と言ってもらったのが最高の褒め言葉だと思っている．

春学期になって，学部対象の線形代数の授業を担当した．3 年生対象の授業だが，内容は日本の 1 年生レベルである．オハイオ州には規則があり，大学院生などが大学の学部で授業を行うには英語の試験を受けるが，職を持っている僕は免除された．大学新聞の 4 コマ漫画に，一生懸命中国語を勉強している学生に友人が「外国語は中国語を選択したのか」と尋ねると，「いや数学の勉強だよ」と答えるのが載っていて，笑えなかったのを覚えている．週 3 回（月，水，金）の授業を準備するために，口頭で述べることはすべて書き上げ，それを暗記した．当然，僕の下手な発音では，通じない可能性が高い．友達から，成績が悪いのは教員の発音が悪いからで自分のせいではないと弁解した学生がいた話を聞いたことがある．家内の助言に従い，講義の内容を 1 ページ程度にまとめて毎回配布した．また，毎回宿題を出し，月曜日に回収するのだが，原田先生からの助言「英語が下手なのだから，熱意があることを示すこと」に従って，3 日分のレポートを必ず月曜日の夕方 3 時間程度かけて採点およびコメントを記入し，それを次の回に返却した．アメリカの学生で一番関心したのは，質問である．黒板に書いている最中に突然質問される．身構えていても判らないことが多い英語なのに，突然質問してくるのである．当然，質問の前半部分は聞き取れていない．しかし，彼らは判らないときに悩まず聞いてくるので，現在書いている数行前を見ると，何が判らないのかだいたい察しがつく．この方法で答えて一度も問題が起きたことはなかった．本当に判らなければ即質問である．日本の学生も身につけてほしい態度だと思っている．

毎日のポイントを書いたメモを渡したのは，本当に役に立った．実際，授業後の質問で，渡したメモに書いてあるだろうと説明すると学生たちは素直に認めてくれた．一般にアメリカの学生は，弁解が得意である．途中から授業に出て来なくなった学生に対して不可の成績をつけると，教官が教科書をくれなかったと弁解した．メモを見て，研究室に来るように伝えたのに来なかったと言うと，友人の裁判で他の州に呼ばれていたと別の弁解を始めた．結局，再履修できる許可を与えたが，色々弁解するのにはあきれる．この大学では再履修に正当な理由が必要なのである．単位を取ると判断

して授業を受ける約束を教員と交わしたわけだから，理由なしに約束を破った学生をもう一度指導する必要はないということだろう．もう一つ，日本と大きく違うことの一つに，勉強の意味では助け合わない．電子工学から2名の女子学生が来ており，仲が良かったのにレポートでは片方は優であり，もう一人は不可だった．原田先生からの助言の一つに，「できない学生が不満を述べるのは当然で，優秀な学生からの不平がないようにすること」というのがあり，質問にはかなり丁寧に対応した．学生評価で Very Good をもらい，英語の発音を考えると自分でも驚いている．

5. ムーンシャインとの出会い

授業の時間以外は，原田先生の研究室の机を使わせてもらっていた．研究室をもらっていたはずだが記憶がない．シンガポール大学の Mong Lung Lang 氏と机を並べて勉強していた．Lang 氏は格子の部分格子のテーター級数を研究していて，さらに当時始まったばかりのムーンシャイン頂点作用素代数の勉強を原田先生と一緒に行っていた．僕は，そこで問題になっているようなことを一緒に考えるというのが毎日であった．

不思議なもので，前回の滞米では十分過ぎるほど時間があっても集中できなかったが，今回は授業の準備でかなりの時間を割いているにも関わらず，数理物理の格子模型の構成など，いくつかの論文をゆっくりと読むことができた．

頂点作用素代数というのは，Richard Borcherds 氏がムーンシャイン予想を解くために導入したものである．この予想は，モンスター単純群と呼ばれる非常に巨大でかつ興味ある有限群（196883 次元空間に作用している）と数論に出てくる特別重要なモジュラー関数である J-関数

$$J(q) = q^{-1} + 344 + 196884q + \cdots$$

の係数とのほぼ一致の意味を問うたものである．これらの仕事により Borcherds 氏はフィールズ賞を受賞している．ムーンシャインというのはアル・カポネ時代の密造酒（中身の不明な酒）の名前であり，John Conway 氏たちが意味のあることかどうか不明ということでつけたようである．現在では頂点作用素代数は，物理の場の理論の Wightman の公理を代数的に考えたものだと言っても良いだろう．

場の理論の公理を少し数学的に解釈してみよう．量子論ではエネルギーレベルは連続ではなく，差はある最小数の整数倍だと考える．これを数学で記述すると，すべての加群（粒子の運動を記述）が自然数の次数付き

$$W = \oplus_{n=0}^{\infty} W_{r+n}$$

となるようなものだけを考えることになる．また，相対性理論で重要な「因果律」とは，時空間（時間を1次元として加えた4次元空間）において光速以上の関係で離れている箇所 z_1, z_2 における2つの作用 A, B は互いに干渉しないということである．すなわち，点 z での A という観測を $A(z)$，z での B という観測を $B(z)$ で表すと，z_1, z_2 が光速以上の距離の関係なら，

$$A(z_1)B(z_2) - B(z_2)A(z_1) = 0$$

ということになる．単なる作用 A, B の可換性（順序の交換可能性）ではなく，z_1, z_2 の位置関係に依存しているのである．光速以上に離れているという関係を，説明は省くが，次元を落して変形することで，$z_1 \neq z_2$ という関係に変えることができる．すると，ある自然数があって，

$$(z_1 - z_2)^N (A(z_1)B(z_2) - B(z_2)A(z_1)) = 0$$

という形に変わる．A，B は可換ではないが，$z_1 \neq z_2$ なら可換ということである．

似たような例を少し紹介しよう．有理関数 $1/(1-z)$ を考えてみる．これは，$|z| < 1$ において，

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

とベキ級数に展開できる．一方，

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})}$$

なので，$|z| > 1$ では

$$-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} -z^{-n}$$

とも展開できる．この 2 つの展開式は領域が全く異なるので，関数としては，同時に 2 つを考えることはできない．しかし，形式的ベキ級数としてなら考えることができ，その差は

$$\delta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n$$

である．これを同一関数の差なので，0 の展開と呼ぶ人もいる．不思議な形式的ベキ級数で，どの複素数 z に対しても $\delta(z)$ の値は定まらないが，直接の計算から

$$(z_1 - z_2)\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0$$

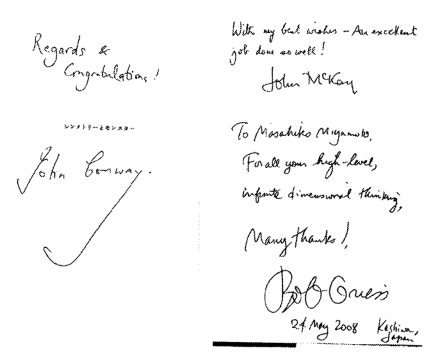
であり，あたかも $t \neq 1$ なら $\delta(t)$ はゼロのようである．しかも，留数（z^{-1} の係数）を与える原点の周り C での積分 $\frac{1}{2\pi i}\int_C \delta(z)$ を形式的に考えると 1 である．ディラックが架空の関数として考案したデルタ関数のような性質を持っている．これが重要な働きをするのが頂点作用素代数なのである．

こんな感じで頂点作用素代数を説明していくと，ものすごく長くなる．初めてこの定義を見た人は誰でも，「こんなものを研究して意味があるの？」と聞いてくる．これまで研究してきた群はたった 4 行ほどで定義が終わる．それと比較して，定義だけで 1 ページに収まらないものを急に研究することになったわけである．しかし，子供のときから，わけのわからないものをずっと眺めているのが好きだったのが功を奏したようだ．これらの定義や例はスルメのように，噛めば噛むほど味が出てくる．ただ，論文を書くことを考えると辛い．定義の本質を理解するまで，それに関する良い結果が得られないのが数学である．定義が難しいということは，それを理解するまでに時間がかかるということで，この頂点作用素代数を使ってモンスター単純群に関する最初の論文を書けたのは，帰国してから実に 2, 3 年経った後の話だった．

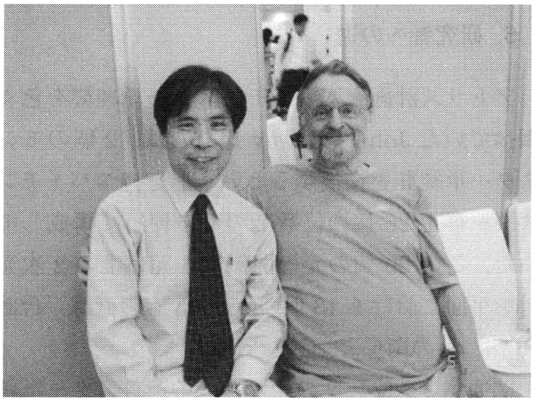
6. 研究者への道

アトラス計画を率いてモンスター単純群を色々調べていた John Conway 氏たちは，2 個のモンスター単純群を交換するという形を持つバイモンスター群を 26 個の位数 2 の元を使って構成していた．この 26 個の元の関係は 3 元体上の 2 次元射影平面における 13 個の点と 13 本の直線（合計 26 個）との関係と一致している．

構造から，位数 2 の元が 2 つのモンスター単純群を交換しているので，それで動かない部分はモンスター単純群になる．3 元体上の 2 次元射影平面で考えると，1 つの線とそれに含まれる 4 点を除いた 9 点と 12 線（すなわち 3 元体上の 2 次元空間における 9 点と 12 直線）との関係が残るわけで，これらがモンスター単純群を生成することになる．そこで，この群をバイモンスター群を使わずに，頂点作用素代数の自己同型を使って直接構成しようと考えた．ちょうど研究していたリーチルートを使ってうまい具合に 21 個の位数 2 の自己同型が構成できた．後はこれらが希望の関係を満たすことを確認すれば良いわけである．しかし，それは膨大な計算だった．形式的には 196884 個の項を持つ元どうしの積の計算である．最初の計算にまるまる一晩かかったが，希望通りの結果を得た．やっと頂点作用素代数の論文ができたのである．しかも，モンスター単純群に直接関係しているので，かなり満足感を感じた．次の日の夕



John Conway 氏，John Mckay 氏，Robert Griess Jr. 氏のサイン．



John Conway 氏と柏キャンパスにて.

方，確認のためにもう一度式の計算を行った．すると，結果が違うのである．間違っている箇所を見つけるために前の計算と比較したが，疲れていてやる気が起きなかった．次の日，3 度目の計算を開始した．2 回目の計算ミスを発見したが，最後がまた一致しないのである．長い計算なので，論文として書けるのかどうか心配していた上に，計算も合わないのである．元々計算は好きではない．事実は正しいと信じて，別証明を探し始めた．そしてモンスター単純群のある性質が判れば，正しいことが示せると確信した．元々はモンスター単純群を使わない構成なのだが，贅沢を言ってられないし，証明の長さと単純な計算だけという結果が気に入らなかったので，諦めることにした．ちょうど，オハイオ州立大学で群論のシンポジウムがあり，Conway 氏に会えることがわかったので，参加してモンスター単純群が僕の希望の性質を持っているかどうかを聞くことにした．失礼だが Conway 氏に対して近寄りがたいイメージを持っていたので，恐る恐る聞いてみると，答えは，「Yes」と言って，親切に説明してくれた．英語なのでその場で完全に理解できたわけではなかったが，Conway 氏の “YES” ほど心強いものはない．その夜，自信を持って，新しい考察を進めて証明を完成させた．途中結果を発表するつもりで来ていたが，完成型を発表することができたのである．Conway 氏はリーチ格子やコンウェイ群に絶対的な自信を持っており，コンウェイ群のことを My Group と呼んでいる．僕の講演の前半は，彼から何度も “I know” という言葉を聞きながら進んだが，後半の結果は予想外だったようで，かなり感心してくれた．

これを機会に，解きたいと思う問題が色々出てきた．それを考えているのが今の楽しみである．僕は，考えている数学の問題から何か出てくるのは，数学の神様からのプレゼントだと考えている．その問題に対して，どれだけ努力したか，神様がそろそろ良いかなと判断すると，答えを教えてくれる．各問題には神様が考えた価値があり，価値の高い問題は，そう簡単に答えを教えてくれない．だから，一生懸命考えているのに問題が解けないというのは，その問題の価値が高いということで，悪い気はしない．これは他人の評価とは関係ない．考えるに値する問題がある限り，数学は楽しい．

（みやもと・まさひこ，筑波大学大学院数理物質科学研究科）



この世界とは何なのだろうか

九後　汰一郎

1. 酒屋の三代目

私は1949年3月に京都市で生まれた（因みにこの年が湯川秀樹博士のノーベル物理学賞受賞の年であることは後年知った）．私の生家は，祖父が始めた酒屋（小売業）をやっていた．母は尋常小学校を出るやその家業を手伝い始め，父は母と結婚して九後家の婿養子となってその酒屋を継いだ（継いだと言っても祖父もずっと亡くなるまで店頭で働いていたが）．父は酒は好きだったが，必ずしも酒屋の商売は好きではなかった．暇を見つけては，家の造作を直すような大がかりな大工仕事をやっていた．カンナがけなど本当に玄人はだしの本格的な仕事ぶりであった．

両親は義務教育くらいの学歴しかなく，家もあまり文化的な環境ではなかったが，それでも商家らしく「読み書きそろばん」の教育，すなわち，書道教室およびそろばん塾には通わされた．そろばんはあまり得意ではなく，頭の中でそろばんをイメージしてその珠を動かして計算をしなさい，という暗算がどうしてもできなかった．見取り暗算だけの2級の検定試験は筆算でやってかろうじて合格したが，読み上げ暗算が入ってくる1級以上は無理なので止めた．私と同時にそろばん塾に通い始めた一つ上の姉は，私よりずっと早く上達し，暗算を素晴らしいスピードでやっていたのは驚異だった．このことは私に少しの劣等感を抱かせた．

母は，家業を継がされて断念せざるを得なかった学校の先生になる自身の夢を，子供に託そうとしていた．私の4つ下の弟は京都教育大学附属小学校に通っていた．私は普通の地域の小学校に行っていたが，中学校に上がるときに，母は自分の夢実現の安全策のためか，私にも京都にある2つの教育大学附属中学校と滋賀大学教育学部附属中学校の計3校の入学試験を受けさせた．しかし，見事に全部すべってしまった．

ということで入学した地域の中学校は，一学年14学級という大人数の学年で，私はその最後のクラス1年14組となった．担任は木原寅一という先生である．この先生は，30代半ばになって初めて教職に就かれ，その初めての生徒が我々の学年である．この先生は，担当は数学であるが，常々，頑張って勉強して出世しなさい，と我々を鼓舞された．「勉強は苦しい．が，いま苦労しておけば，後々楽ができる．中間と期末の定期テストの前一週間だけでも勉強しなさい」と，全く勉強などしそうにない我々の地域の生徒たちに，わかり易い直接的な言葉でアピールされた．「勉強は苦しい」と私は思ったことはなかったが，全く勉強の習慣のなかった我々も定期試験前には，友人たちと勉

強するようになった．この先生の下でこのときにできた友人たちは，めいめい仕事は全く違うが，未だにつきあっている．私は小学校ではあまり学力を褒めてもらったことはないが，中学校になって初めてこの先生に認めて頂いた．「おまえは良くできるから，頑張って将来京都大学に行け」と言われた．それまで将来は家業を継いで酒屋になる，と漠然と私は考えていたのだが，それを聞いて「自分なんかがそんな大学へ行けるんだろうか？」とはるか遠くを見やる思いがした．

2. 高等学校

この先生の薦めもあって，私の入った高等学校は，いわゆる進学校であった．教科によっては，高校3年間に履修すべき課程を2年間で一通り終えてしまって，3年生でもう一度進んだ立場で学習し直す，というような学校であった．しかし，学校には意欲的な先生方が多く，単なる受験教育ではない，勉強（学問）のおもしろさを伝えようとする独自の教育法を実践されていた．国語の木村観次先生もそうであった．高校一年の授業では，定期的に（2カ月に一回？）課題の小説を指定され，その読書感想文を書かされた．それまで全く読書習慣がない私には大変な苦行であったが，文章の読み書きの訓練にはなった．この先生は，別の学年度には，万葉集を万葉仮名で我々に読ませ，柿本人麻呂の長歌・短歌などを暗唱させた．短歌の所々の断片や，長歌のリズムは未だに口に出てくる．

高校一年生の授業でおもしろかったのは数学と物理だった．数学は中学校時代から得意な科目だった．地域の公立中学校からその進学校の高校に編入で入って，あまりに進んでいるため，最初全くわからなかったが，「自分は数学が得意だ」という意識が頭からあって，少し勉強すれば必ずできる，という全く裏付けのない自信があった．そして実際，しばらく勉強すればすらすらわかって一段と好きな科目になった．一方，物理は，自分には全く「新しい科目」であった．その初めの頃の授業で，「ある一定の加速度 a で走ったとき，t 秒後の速度と位置を答えよ」という問題があった．私にはちんぷんかんぷんであったが，同級生の一人が前に出て，なにやら速度の時間変化のグラフを書いて，その下の三角形の面積が走った距離である，と説明した．その説明がわかりにくかったので，担当の先生が易しく説明し直してくれたが，私には一向に理解できなかった．その後，投げ上げた物体の放物線運動が水平方向の等速運動と鉛直方向の等加速度運動に分解できることなどを習うにつけ，十分わからないまでも大変興味がわいた．それに，その物理の担当の梁聖大という先生が実は京都大学のオーバードクターをしている非常勤講師の方で，非常に熱心に教えて頂いた．必ずしも教え方がうまいわけではなかったが，そのおもしろさを伝えようとする熱意と真摯さに感銘を受けた．その後，現代物理学が，時間の流れ方や物の空間的長さが観測者により異なるとか，非常に深遠な理論であるらしいことをその先生から教わり，そういうものを勉強するにはどういう本を読めば良いのか相談したこともあった．

私が高校2年生の1965年，朝永振一郎博士がノーベル物理学賞を受賞するというニュースがあった．これは，私にはかなり衝撃だった．湯川秀樹博士と同じ素粒子論の分野で，湯川博士と同級生だった朝永博士が，日本人として二人目の受賞者になられた．ノーベル賞の発表からしばらくして，朝永博士の『量子力学的世界像』というタイトルの単行本が高校近くの書店の店頭にも平積みされた．その白い美しい装丁の本は買わずに一部を店頭で立ち読みをした．「光子の裁判」という題の文章である．

これは裁判仕立ての話で，「波野光子（なみのみつこ）」という被告が，ある事件の起こった部屋の中へ，相並ぶ2つの窓から「同時に入った」と主張するのに対し，検察官は被告が入ったのはどちらか一方の窓からであり，同時に入るなどという奇想天外な主張はだれも認めないだろう，と言う．そこでディラック弁護士がその奇想天外な主張が実は正しいものである，ということを順々に説得してゆくのである．

「波野光子」というのは，もちろん，光の粒子で

ある「光子（こうし）」が実は波でもある，ということから著者の朝永博士がしゃれて付けた名前である．ディラック弁護士は，朝永博士がその著『量子力学』を訳したイギリスの物理学者ディラックである．量子力学では，光子に限らず，電子も陽子も，その他すべての存在が，「粒子であると同時に波である」ことを教える．世界を構成しているミクロな物質粒子は，こういう不思議なものであること，この物質世界の成り立ちについて自分が何もわかっていないこと，を私はこの本から学んだ．「この世界とは何なのだろうか？」将来，自分も素粒子論を研究したいと思う大きな契機となった．

高校3年生になって，物理学は高校課程の初めから全部を微分積分を使って習い直すものとなった．これは大変おもしろかった．物理で微分積分を使うことによって，逆に微分積分の概念と dx の意味が良くわかった．ガウスの法則 $\mathrm{div}\, E = \rho$ の積分形を習ったとき，同じ考えを重力に適用して，地球の中心を通るまっすぐな井戸を掘り，そこに物を落とすと単振動をすることを「発見」して，えらく感激したことを憶えている．

3. 大学に入って

このようにして，京都大学の理学部にいざ入学してみると，教養学部でやっている物理学の講義は，高校で習ったこととほとんど同じで，おもしろくなかった．一方，数学のほうは，なぜ $1/n$ の $n \to \infty$ の極限が 0 であるのかを ε, δ で証明するとか，実数をコーシー列やデデキントの切断で定義するなど，これまでの直感的な高校数学と全く違う斬新な物でショックを受け，「さすがは大学」と感心した．そういうことで一時は物理をやるという初心を撤回して，専門は数学にしようか，と考えていた．そのうちに大学の2年生の後半くらいから大学紛争が激しくなり，教養の授業が全くなくなるという事態になった．大学では同級生たちと議論したり，デモに行ったり，あるいは自主ゼミを組んだり，自宅で一人で勉強したりして過ごしていた．もしあのときに大学紛争がなく，平穏に3年生からの専門への分属試験が実行されていれば，おそらく自分は数学を専攻していたのではないかと思う．しかし，自宅でポントリャーギンの『リー群論』を勉強していて，自分の数学的能力に限界を感じた．特に憶えているのは，位相空間の次元の定義である．その定義が自分の知っている（我々のこの空間は3次元である，という）空間の次元と全く結びつかない，その定義を何度読み直してもその直感と全く接点がなかった．議論する相手がいなかったこともあるが，本当にもうわからない，という絶望的な気分に陥った．自分にはとてもではないが直感的・感覚的な理解ができない抽象的数学はやれない，と思った．それで，やはり最初の志通り，現実の物質の世界，を相手にする物理学のほうが自分に向いていると思ったわけである．

幸い紛争の一つの効用で，分属試験なしに自由にどの学科にも行けることになったので，物理学科志望にした．といっても，分属という概念がなくなったので，自分は「物理学を主として修める」と心に期すだけである．急遽志望を変更したので，元から迷わず物理に行くと決めて勉強していた学生たちに追いつくべく，私は力学は分厚いGoldsteinの教科書ではなく，薄いランダウ−リフシッツで勉強した．この教科書の初めのほうに，質点のLagrangianがガリレオの相対性と時空の一様性だけから決定されるというくだりがあるが，私はそこにいたく感激した．「本当の物理」はやはり違う，と思った．また電磁気学や一般相対論もランダウ−リフシッツの『場の古典論』で勉強した．この『場の古典論』は，本当に良い教科書であった．今でも最高の教科書ではないかと思っている．量子力学は，紛争中にも一人でディラックや朝永やシッフの教科書を次々に読んでいたが，一向にわからなかった．ディラックの教科書は，線形代数が非常に良くわかるようになるが，量子力学の物理的内容は良くわからない．朝永の教科書は，前期量子論からハイゼンベルクの行列力学の発見に至る歴史的経緯はよくわかるが，量子力学とは何かについての本論に入る前に疲れてしまう．次に読んだシッフでも未だわかった気にならなかった．

その段階で量子力学もランダウ–リフシッツで勉強しようと思った．その教科書でようやく量子力学がわかったような気がしてきたが，それは教科書が良かったというよりも，紛争後に再開された学部の専門講義でも習うようになり，いろいろな量子力学の概念にようやく慣れてきたことのほうが大きかったと思う．

湯川博士が定年で京都大学基礎物理学研究所を退官されたのは，私の学部卒業と同時であった．「物理学概論」だったと思うが，湯川博士の最後の年の講義を基礎物理学研究所の大講演室で聴いた．湯川博士にあこがれて京都大学理学部に来たのだったが，博士の講義はあまり良く聞こえず，お世辞にも名講義ではなかった．博士の定年後にも，基礎物理学研究所で博士を囲んで定例で開かれていた「混沌会」というコロキウムで何度も間近で見ていながら，小心な私には，残念ながら直接話す機会は遂になかった．

4. 大学院で

私が大学院に在学したのは1971年から1976年であるが，それはまさに素粒子論の大転換の時代であった．修士1年の初めの頃は標準的な場の理論の勉強をしていたが，夏休み明け頃からより進んだ「最先端の素粒子物理」への準備として勉強したのは，Edenらの教科書『The Analytic S-Matrix』やCollinsの総合報告「Regge theory and particle physics」などである．S行列の解析性や分散式，レッジェ極理論および双対性などが当時の世界的な主流だったのである．しかし，そういうアプローチは，ひどく難しい多変数複素関数論などを駆使するにも関わらず，素粒子世界の神秘に対しては隔靴掻痒の感を免れない不満を感じていた．研究室の町田スクールが双対性とともに追求していたクォーク模型はもっと直感的で親近感を持ったが，自分がこれから果たしてクォークが実在することを信じて研究してゆくべきかどうか，を真剣に悩んだ記憶がある．

修士1年の71年暮れ頃に，当時素粒子論研究室の助手だった益川敏英さんが，研究室で初めてWeinbergの67年の論文「A Model of Leptons」，いわゆる電弱相互作用の統一ゲージ理論，を紹介した．私にはそれはかなりの衝撃だった．修士課程に入学して以来，S行列の解析性やレッジェ極理論，多変数複素関数論などに違和感を覚え，これから本当に素粒子論研究をやって行けるのだろうかと不安を感じていた私にとって，直接的・直感的でわかり易い「場の理論」が素粒子の相互作用の記述に使えるのだ，との認識は斬新であった．また，それより前に自分で勉強していたYang–Mills理論が使われていたことにも大変親近感を覚えた．

私は，残念ながらWeinberg理論そのものに対しては，人工的・技巧的な感じがして幾分ネガティブな印象を持った．しかし，72年になってから，弱い相互作用や素粒子の基礎理論としてゲージ理論が使えるかも知れないということで，益川さんが上述の紹介で触れていた「Yang–Mills理論のくりこみ可能性」についての 't Hooftの論文を勉強することにした．

't Hooftの論文は大変難解だった．まず経路積分による場の理論の新しい定式化を用いている点や，ダイアグラムによる組合せ論的な議論のみで，皆目フォローできなかった．幸い72年になった頃には，'t Hooftの論文をわかり易く，より完全なものとすべく，Ben LeeとZinn–Justinのくりこみ可能性・ユニタリ性の証明に関する長大な論文がプレプリントで出てきた．FaddeevとPopovの昔のロシア語の論文をBen Leeが英訳したプレプリントも出てきた．それらを読んで勉強を始めたが，4月頃から週に1, 2回益川さんの部屋に行ってわからないところを教えてもらう，という指導をしてもらえるようになった．

益川さんは，実は，その4月から研究室の新任助手として名古屋から着任したばかりの小林誠さんと「くりこみ可能なWeinberg理論の枠内でCP対称性を破ることができるか？」という共同研究を始めていて，私への研究指導はそれと並行して行っていた．小林–益川のその仕事は，もちろん2008年度のノーベル物理学賞の対象になった仕事である．時々彼らの議論を側で見る貴重な経験を



スウェーデン王立科学アカデミー主催レセプションにて．ノーベル物理学賞の解説ポスター前の（右より）小林誠さん，益川敏英さん，筆者，2008 年 12 月 7 日（Photo by Kenji Matsui）．

したが，残念ながら，そのときの私は未だ彼らと一緒に議論して共同研究できるレベルではなかった．

しかし，程なくして私は 't Hooft の論文に書かれている 't Hooft–Feynman ゲージを，一つのパラメータ α を導入して一般化できることに気づいた．これは今日では R_ξ ゲージと呼ばれているもので，このゲージでは，ゲージ場のスカラー成分，Higgs 場の位相成分，Faddeev–Popov ゴースト，反ゴースト，といった 4 つの組の非物理的粒子モードすべてが，共通の 2 乗質量 αM^2 を持つ．ゲージパラメータ α を無限大に持ってゆけば，そういう非物理的モードは皆無限大の質量を持つので，エネルギー保存則だけからそれらが出てこないことが明白になる！ このように重大なことがあまりに簡単に示せたので，私は勇んで益川さんのところに行き興奮気味に説明した．ちょうどそこに居合わせた小林さんも興味を持ってくれたようだった．しかし，代数的な式を数行書けば示せる，この「発見」だけでは論文にできないだろう，ということで，もう少しくりこみ可能性との関係を調べようということになった．

ところが，しばらくして，アメリカの Ben Lee の所に居た藤川和男さんが一時帰国して来られて，基礎物理学研究所で話をされるというので聞きに行った．聞くと，私の発見と同じゲージが主題であった．彼らは私の α（の逆数）の代わりに ξ というパラメータを使っていた．明らかに私の発見は独立なのだが，彼らは，すでにそれを使って Weinberg 模型でミュー粒子の異常磁気能率を計算し，立派なプレプリントを作っていた．Fujikawa–Lee–Sanda の論文である．私は大変ショックを受けた．

これで私は「このままではもう論文を出せない．それを使って本格的なくりこみ可能性・ユニタリ性の証明を与えるなどしない限り，発表できない」と思った．その方向でしばらく頑張ったが，未だ駆け出しの私にはくりこみ可能性の問題は難しく，結局その題材で論文は書けずに終わった．

このときの小さな「成功と挫折」は，その後の私の研究に割合大きな影響を与えた．まず思ったのは，「アメリカの流行の研究と同じものをやっていてもダメだ」ということである．その当時はプレプリントが欧米から到着するのも時間がかかり，プレプリント作成以前にも直接セミナーや議論をしている流行の話題を追いかけても，時間的ハンディがあるので必ず負けるだろう，と思ったのである．それで，それ以降ゲージ理論の方面から撤退して，修士論文は，ハドロンのクォーク模型を Bethe–Salpeter 方程式を用いて扱うものを書いた．博士 1 年生になってもその方向で，ハドロンの内部の自己無撞着な場の中のクォークが独立粒子的に振る舞うという模型をやっていた．

ところが，その間世界的には素粒子論は，すべての相互作用がゲージ理論として理解できるというパラダイムへの大きな転換のただ中にあったのである．特に，Politzer と Gross–Wilczek の Yang–Mills 理論での漸近的自由性の発見である．これが強い相互作用が量子色力学（QCD）で記述できる，ということに決定的な支持を与えることになった．そういう動きを私は全く知らなかった．これに気づかせてくれたのは，研究室の小林さんと先輩の東島清さんである．小林さんは我々若手が組織した「関西若手地域合宿」の最初の講師として，当時未だ東大のドクターだった細谷暁夫さんを推薦し，この漸近自由性の講義を頼め，と示唆してくれた．東島先輩には，確か，その年の白馬での若手夏の学校で，満天の星空の下で，今世界で起こっている場の理論をめぐる大きな動きを熱っぽ

く解説してもらったのを覚えている．

こういう経緯で，一旦離れたゲージ理論，場の理論をもっと本格的に勉強しなければならない，と認識するに至った．そこでやっと私も，自分が本来やりたかったことにようやく到達したという気がした．

その後，基礎物理学研究所の助手をされていた福田礼次郎さんの指導を得て，有効作用のゲージ独立性，ゲージ理論での Schwinger–Dyson 方程式によるカイラル対称性の自発的破れの研究，などの仕事をした．小林さんとも，$\mu \to e\gamma$ 崩壊の噂があったときにいち早く，レプトンの 3 世代に小林–益川の混合を導入してその振幅を計算する共著論文を書いた．益川さんはこの間もずっと研究室の場の理論ゼミを主宰し，その方面の研究を牽引していたのだが，不思議なことに私は益川さんとは一篇も共著論文がない．

5. オーバードクター時代

当時，Yang–Mills 理論（非可換ゲージ理論）のそれまでの発展はすべて経路積分法による定式化に基づいており，その意味では，粒子の状態とか，場や観測量の演算子とかは，皆こっそりと考えてはいるが，あからさまにそういうものを議論することはできない，という奇妙な状態であった．明らかにゲージ理論の演算子形式を与える必要があったのだが，不思議なことにそういう問題意識を持った人は世界的にあまりいなかった．我が京都大学には中西襄先生が 1966 年中西–Lautrup formalism と呼ばれる量子電気力学（QED）の明白に共変な演算子形式――不定計量正準理論――を完成させていて，そういう伝統があった．不定計量の場の理論についての半年間の講義が私が修士 2 年の 1972 年の前期にあり，その講義を聞いたときから，QED の場合の演算子形式は，非可換ゲージ理論の場合に，どう拡張すれば良いのか？ という問題を何度か考えていた．特に，物理的状態を選ぶ Gupta–Bleuler–中西–Lautrup の補助条件をどう変更すれば良いのか，いろいろ考えたが（その後も折に触れ何度かトライしたが），いつもそこで挫折していた．しかし，その問題意識はずっとあった．

私が博士課程を終え，オーバードクターになったばかりの 1977 年の春頃，中西先生が京大物理学教室のセミナーで話をされ，「クォークの閉じ込めは QED における縦波やスカラー波が出てこないのと同じようなものだ」とコメントされたのに対して，田中正先生が「QED の場合は，スカラーモードは自由場なので閉じ込めの例としてはあまりに自明過ぎる．Yang–Mills 場のときの縦波やスカラー波，Faddeev–Popov ゴーストのモードなら相互作用をしているから閉じ込めの例としてもおもしろいと思う．中西さんの QED の Formalism は Yang–Mills 場のときにも適用できるようにできませんか？」と質問された．これに対して中西先生は「残念ながら，Yang–Mills 場の場合は運動方程式とコンシステントなうまい補助条件が設定できない．経路積分法では，Faddeev–Popov ゴーストは loop を回るだけで外には出てこないと言っているが，あれはそう解釈しているだけでちゃんとした（演算子形式の）理論として定式化されている訳では全然ない」と答えられた．私はその頃「経路積分法と演算子形式とは全く等価である」と確信していたので，そのときつい「経路積分法でそのような非物理的モードが外に現れないということが示されている以上，演算子形式でも必ず同じことが言えるはずだ．簡単な補助条件は見つからないかもしれないが，絶対できるはずです」と言ってしまった．

そのとき修士 2 年生だった小嶋泉君は，そのセミナーのすぐ後，私の部屋にやってきて私の発言の真意を質した．私は「自分は未だ何も具体的に明らかにしたわけではない．しかし演算子形式ができることは確信している．」と答えたが，それを契機に小嶋君との共同研究が始まった．

最初物理的モードのみからなる始状態から出発した場合の S 行列に対して，Ward–高橋恒等式が導く条件を，終状態が含む非物理的モードが 1 粒子の場合，2 粒子の場合，3 粒子の場合，と具体的に調べていった．1 粒子の場合は，QED と同じ理由でゼロノルムになった．2 粒子の場合になる

と，Ward–高橋恒等式が，縦波一個とスカラー波一個を含む振幅とFP ゴースト–反ゴースト対を含む振幅とが等しいという関係式を出すにも関わらず，それらの間でノルム相殺が起きず，ゼロノルムにならない！ という，事態に出くわした．ここで初めてFaddeev–Popov ゴーストの通常のエルミート性の付与の間違いに気づいた．FP ゴーストも反ゴースト（の i 倍）もどちらもエルミートと考えれば，ノルム相殺が起きてゼロノルムになる．しかもそのとき，Lagrangian もエルミートになるので，その正しさを確信した．終状態に非物理的モードが3粒子入ってくる場合は，Ward–高橋恒等式が振幅に対して出す関係式はかなり複雑になってくる．しかし，今度は特にそれ以上の困難はなく，その振幅の関係式がゼロノルムを保証していることを示せた．次に4粒子の場合になるとWard–高橋恒等式の導く関係式が，非常に多くの振幅の間の関係式になるので，本当に複雑になる．この場合にも直接ゼロノルムになる証明を何とか力ずくでやったが，ともかく，それ以上の粒子数や一般の場合には，Ward–高橋恒等式の導く関係式が極めて複雑でこの方法でゼロノルムだと証明できないことは明らかだった．その時点で，そのWard–高橋恒等式の導く関係式をじっと眺めていて，何かある双一次のフェルミ的‘荷電演算子’を掛ければ消える，という条件式と同じであることに気づいた．そのときに，少し前に読んでいたZinn-Justin の Bonn での Lecture Note の記述を思い出した．そこには，確か，Ward–高橋恒等式がフェルミ的な対称性から導かれる，と書いてあった．早速，そのフェルミ的な対称性——BRS対称性——に対応したNoether 電荷を作り，その自由部分を見ると，果たして上で見つけた‘荷電演算子’と全く同じ表式だった．

この仕事は，私のオーバードクターのときの仕事で，精神的に苦しい時代を救ってくれた．休みの日に自宅の食堂のテーブルの上に文献を広げ，膝には一歳になったばかりの息子を乗せて，懸命にレポート用紙に論文原稿を書いていた情景を覚えている．私が博士課程を修了した1977年は，研究職の公募が皆無に近かった．しかも，修了した4月からは，日本学術振興会の特別研究員にも採用されず，正真正銘のオーバードクターになってしまった．幸い前年の11月に結婚した妻は中学校の教員だったのですぐに生活に困窮するわけではなかったが，自分のほうに全く収入がないのもまずいので塾の講師を週に一コマだけすることにした．幸い3カ月経ってから，補欠繰り上げで日本学術振興会の特別研究員になることができた．しかし，その後も，数少ないがあった助手公募へは皆応募したが不採用，フンボルト財団の研究員にも西島和彦先生を通じてSymanzik に受け入れを頼んで応募したが，それも落ちてしまった．オーバードクター1年目の秋に出した大量の海外研究機関へのポスドク応募も，次々と，不採用通知が来るという状況で，だんだん妻の私に対する固い信頼も揺らいできていた．そういう客観的に言えば酷い状況のオーバードクター2年目だったにも関わらず，そんなに深刻な精神状態に陥らなかったのは，この小嶋君との共同研究がうまく行き気分が高揚していたおかげである．

この後，幸い München の Max-Planck Institute にポスドクとして採用された．山崎和夫先生や田中先生がDürr 所長に強く推して頂いたおかげである．小嶋君との仕事が認められて，München滞在も1年弱で古巣の京都大学理学部に助手として呼び戻された．

6. おわりに

もっと研究上の失敗談・悔恨譚を書こうという最初の意図とだいぶ違って，かなり個人的な履歴になってしまった．読み返して見ると恥ずかしくて全面的に書き直したくなるが，時間切れでこのまま出さざるを得ない．このような個人的な話からでも，若い読者が何らかの役に立つ教訓を引き出していただけたら幸いである．最後に，お世話になりながら紙幅の制限でここに適切に触れられなかった多くの先生方や先輩，後輩，同僚に，ご寛恕を乞いつつ感謝して筆を置く．

（くご・たいちろう，京都大学基礎物理学研究所）

特　集（2010年7月号予告）

物理学と行列

自然認識に果たす多彩な役割

本体 952 円

特　集（2010年5月号）

物理学事始め

各分野へのガイド

本体 952 円

編集後記

今回の特集はいかがでしたでしょうか．「現代幾何と方程式」と銘打って幾何学と方程式の関連性を探っていくことを目標に当初は解析学で出てくる方程式や幾何学を取り上げる予定でしたが，範囲が少し広いのではないだろうか，ということで今回のようなラインナップに落ち着きました．それだけ方程式や幾何学には多様性があるのだろうと思います．今回の特集を読まれた方で他にもこんな方程式がある，とかこれが取り上げられていない，といったご意見がございましたら，お寄せいただければ幸いです．

ところで今月号のリレー連載「現象から方程式を創り出す」では，感染症流行の話が掲載されております．読者の皆さんの中には昨年，話題になった新型インフルエンザの流行を思い出す方もいらっしゃるのではないでしょうか．

また，新たなウイルスが発生し，昨年流行した新型インフルエンザのように，どんどん感染者が増えて，やがてまた減っていくという現象が今後もあるかもしれません．こういったことに興味を持たれら，まずは自分の周囲では，どういうように流行が拡がるか，そして具体的に自分や周囲は具体的にどんな行動をとればいいか，調べたり議論したりすると数学を使っているな，と感じることもできるかと思います．（R）

数　理　科　学　6月号

2010年6月1日発行

数 理 科 学 編 集 部　　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　ⓒ　株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁